

## 双曲守恒律方程的加权本质无振荡格式新进展\*

徐振礼 刘儒勋 邱建贤

中国科学技术大学数学系, 合肥 230026

**摘要** 近几年, 在计算流体力学中, 高精度、高分辨率的加权本质无振荡 (weighted essentially non-oscillatory, WENO) 格式得到很大的发展. WENO 格式的主要思想是通过低阶的数值流通量的凸组合重构得到高阶的逼近, 并且在间断附近具有本质无振荡的性质. 本文综合介绍了双曲守恒律方程的有限差分 and 有限体积迎风型 WENO, 中心 WENO, 紧致中心 WENO 以及优化的 WENO 格式等, 讨论了负权的处理和多维问题的解决方法. 最后, 通过一些算例证明 WENO 格式的高精度, 本质无振荡的性质.

**关键词** 有限差分法, 有限体积法, 加权本质无振荡方法, 双曲守恒律方程

### 1 引言

在求解流体力学问题和工程计算中, 常常会遇到求解区域中有一些物理量有很大的梯度变化或者间断的问题, 如水跃问题, 气动力学上的激波问题等. 对一般的数值方法在处理这类问题时, 常常会引入非物理的振荡. 为确保数值解的逼真和提高分辨率, 数学家和计算工作者设计了很多的方法来消除这种振荡. 在本质无振荡 (essentially non-oscillatory, ENO) 格式提出之前, 具有总变差不增性质的 TVD (total variation diminishing) 数值格式一直是人们研究的热点. 然而, 虽然 TVD 格式具有高分辨率的优点, 但是这类格式的精度却非常的低, 在极值点附近, 通常只有一阶的精度, 且在多维情况下, 只能是一阶精度. 因此, 计算数学家通过降低总变差不增的苛刻要求, 提出了具有总变差有界 (total variation bounded, TVB) 性质的高精度、高分辨率的 ENO 格式. 1987 年, Harten, Engquist, Osher 和 Chakavarthy<sup>[1]</sup> 首先发表了关于 ENO 格式的经典论文. 此后, 这种本质无振荡类型的格式成为了研究的热门. ENO 格式在重构过程中, 通过自适应的选择扩展节点模板 (stencil), 以达到高阶的精度, 并且在间断附近具有本质无振荡的性质. 但是, 由于 ENO 格式在重构时, 在多个备选模板中仅选择了一个最优模板而摒弃了其

它模板, 这样把很多有价值的信息都丢弃了, 在每次模板扩展中至少扔掉了一半的计算工作量. 因此, 在 ENO 的基础上, 计算数学家又提出了加权本质无振荡 (weighted ENO, WENO) 格式. WENO 格式很好的克服了 ENO 计算“虚功”太多的问题, WENO 格式利用各个备选模板的凸组合的方式重构, 每个模板的权值也就是组合系数的选取依赖于该模板上数值解的局部光滑性, 这样, 在同样的可选模板情况下, 在光滑区域, WENO 具有比 ENO 更高的精度, 而在间断附近, 却保持有 ENO 的性质.

Liu, Osher 和 Chan<sup>[2]</sup> 首先构造了一维空间上的 3 阶有限体积 WENO 格式, 然后, Jiang 和 Shu<sup>[3]</sup> 在多维空间上构造了 3 阶和 5 阶的有限差分 WENO 格式, 并且在该文中, 提出了现有的光滑因子 (smoothness indicator) 和非线性权构造的基本框架. 之后, WENO 格式得到了进一步的发展, Friedrich 和 Hu 等<sup>[4,5]</sup> 在二维三角域中构造了 2 阶、3 阶和 4 阶的有限体积 WENO 格式, Balsara 等<sup>[6]</sup> 发展了 7 阶~11 阶的有限差分 WENO 格式.

中心 WENO 格式通过交错网格的方式来实现重构, 与迎风型的 WENO 格式相比, 中心 WENO 格式具有不要求解 Riemann 问题, 不需要特征分解, 不需要进行流通量分裂的优点. Levy, Puppò 和 Russo<sup>[7~9]</sup> 发现了中心 WENO 格式的 TVB 性质, 并

且构造了多维的中心 WENO 格式, Qiu 和 Shu<sup>[10]</sup> 讨论了 5 阶和 9 阶的中心格式. 虽然, 中心 WENO 格式求解方程组具有不需要特征分解的优点, 但是随着精度的提高, 在激波附近会产生一些振荡, Qiu 和 Shu<sup>[10]</sup> 还通过大量的算例证明了, 低阶的中心 WENO 格式可以不进行局部特征分解, 但是高阶的中心 WENO 格式为了削减振荡, 进行特征分解是有必要的.

自 20 世纪 90 年代以来, WENO 格式一直是人们研究的热点, WENO 也得到了迅速的发展. 由于 WENO 格式具有高精度、高分辨率的良好性质, 因此特别适合间断问题的处理. WENO 格式在计算流体力学尤其是不可压气动力学中得到了很好的应用, 比如激波湍流问题、航空声学问题等, WENO 都能很好的解决一般格式所遇到的困难.

但是 WENO 格式由于选取的模板过大, 使其在边界的处理上非常麻烦, 这个缺点阻碍了 WENO 的广泛应用. 紧致的高阶非线性格式 (compact nonlinear schemes, CNS)<sup>[11]</sup> 由于所选取的模板较小, 而且具有较高的精度, 引起了广泛关注, 将 WENO 技巧应用到 CNS 而发展起来的 WCNS 格式<sup>[12~14]</sup> 不仅吸收了 CNS 模板小的优点, 而且保持了 WENO 高精度, 高分辨率的性质. 这是一项很有意义的工作, 但是, 有得必有失, WCNS 是一种隐式的格式, 并且 WCNS 也没有根本上克服 WENO 的缺陷.

纵观当今流行的数值求解计算流体力学的方法, 每种方法都有其自身特点及其使用范围, 从而看不到一种方法能够一统天下的局面. 除了本质无振荡类格式以外, 我们看到还有许多方法在蓬勃发展. 间断 Galerkin 方法<sup>[15]</sup> 具有高精度、非线性稳定和适于并行计算的优点, 并且间断 Galerkin 方法适合复杂区域的计算和具有捕捉激波的能力, 使其受到许多工程学家和数学家的广泛注意, 但是间断 Galerkin 方法对方程组的求解却具有比较多的限制. 国内的同行也做了许多工作, 比如时空守恒格式<sup>[16]</sup>, 动力差分格式等, 这些工作也都是非常有意义的, 应该引起人们的注意. 在流体力学气动力学方程, 浅水波方程和高 Reynolds 数的 Navier-Stokes 方程等的求解, 这些方法都得到了很好的结果. 虽然, 国内同行对 WENO 的研究开始比较晚, 但是, 沈孟育和侯中喜等<sup>[17~19]</sup> 的工作是值得注意的.

本文综合介绍了迎风型的 WENO 格式和中心 WENO 格式, 并介绍这些格式的新进展. 在介绍迎风格式时, 对有限差分的 WENO 格式做了重点介绍; 并且介绍了一维方程组和多维问题的处理方法. 由

于 WENO 与 ENO 的相关性, 在接下来的一节, 先简要的回顾一下 ENO 格式的重构过程, 然后在第 3 节介绍迎风型的 WENO 格式、中心 WENO 格式、紧致的中心 WENO 格式和针对高频波而设计的优化 WENO 格式, 以及用分裂方法 (splitting technique) 解决负权问题, 在第 4 节介绍 Runge-Kutta 方法和自然连续扩展 (natural continuous extensions, NCE) 的 Runge-Kutta 方法来解决时间离散问题, 最后在第 5 节, 通过一些算例证明 WENO 格式的高精度、高分辨率的性质.

## 2 ENO 方法的简单介绍

下面以一维标量方程

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad x \in [a, b] \quad (1)$$

为例简要回顾一下半离散 ENO 格式的构造. 首先考虑空间变量的高精度 ENO 格式的构造问题. 时间离散采用 TVD-Runge-Kutta 方法, 这部分内容将在第 4 节介绍. 将网格剖分为

$$a = x_{1/2} < x_{3/2} < \cdots < x_{N-1/2} < x_{N+1/2} = b$$

单元  $I_j = [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$

单元中点为  $x_j = (x_{j-1/2} + x_{j+1/2})/2$

步长  $\Delta x_j = x_{j+1/2} - x_{j-1/2}, j = 1, 2, \dots, N.$

有限差分的 ENO 格式要求使用均匀的网格. 设步长为  $\Delta x$ . 利用  $f_j = f(u(x_j)), j = 1, 2, \dots, N,$  构造分段  $k-1$  次的插值多项式  $P(x)$ , 满足

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{x-\Delta x/2}^{x+\Delta x/2} P(\xi) d\xi = f(u(x)) + O(\Delta x^k) \quad (2)$$

有了  $P(x)$  后就可以给出所要求的数值流量  $\hat{f}_{j+1/2} = P(x_{j+1/2})$ , 而在网格点  $x = x_j$  上,  $f(u)_x$  可以有以下的流量差商逼近

$$f(u)_x|_{x=x_j} \approx \frac{1}{\Delta x} (\hat{f}_{j+1/2} - \hat{f}_{j-1/2}) \quad (3)$$

具有  $k$  阶的精度, 这样就重构得到了  $f(u)$  的导数值.

容易知道,  $P(x)$  在单元  $I_j$  的平均值为  $\bar{P}_j = f_j$ , 问题是如何选取节点模板, 在此模板上求满足条件 (2) 的分片插值多项式  $P(x)$ , 从而得到间断点  $x_{j+1/2}$  处的值. ENO 方法的巧妙之处在于, 使用自适应的扩展模板思想构造插值多项式, 在插值区域中自动的选取  $k$  个节点的模板, 使得在这个模板上尽可能的避免间断的发生, 然后在该模板上插值得到具有  $k$  阶精度的多项式.

考虑  $f'(u) \geq 0$  的情况, 根据迎风思想, 选择初值节点模板  $S^{(0)}(j) = \{x_j\}$ .

显然, 要扩展模板, 有 2 种可能的选择, 记  $S_L^{(1)}(j) = \{x_{j-1}, x_j\}$ ,  $S_R^{(1)}(j) = \{x_j, x_{j+1}\}$ . ENO 通过比较这 2 个节点模板上的 Newton 差商

$$\begin{aligned} a^{(1)} &= f[x_{j-1}, x_j] = \frac{f_j - f_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} \\ b^{(1)} &= f[x_j, x_{j+1}] = \frac{f_{j+1} - f_j}{x_{j+1} - x_j} \end{aligned} \quad (4)$$

的大小来进行选择, 若  $|a^{(1)}| \leq |b^{(1)}|$ , 则扩展后的两节点模板为  $S_L^{(1)}$ , 否则为  $S_R^{(1)}$ , 记为  $S^{(1)}$ . ENO 消除振荡的核心就在于每次扩展模板都尽量选取光滑的模板, 而利用 Newton 差商可以比较光滑程度.

假定经  $m-1$  次模板扩充后

$$S^{(m-1)}(j) = \{x_{j-r}, \dots, x_{j+s}\}, \quad r+s = m-1$$

第  $m$  次扩展节点节点有 2 种可能, 即是向左插入点  $x_{j-r-1}$ , 或是向右插入点  $x_{j+s+1}$ . 计算  $m$  阶差商

$$\begin{aligned} a^{(m)} &= f[x_{j-r-1}, \dots, x_{j+s}] \\ b^{(m)} &= f[x_{j-r}, \dots, x_{j+s+1}] \end{aligned} \quad (5)$$

比较两者绝对值的大小, 若  $|a^{(m)}| \leq |b^{(m)}|$ , 则选择左插节点  $x_{j-r-1}$ , 否则选右插节点  $x_{j+s+1}$ , 从而可确定  $S^{(m)}(j)$ .

在最终确定的模板  $S^{(k)}(j)$  上插值得到  $k-1$  次多项式  $P_{j+1/2}(x)$ , 使得对  $S^{(k)}$  上的任一元素  $x_l$  都有

$$\int_{I_l} P_{i+1/2}(x) dx = f_l$$

如果  $f'(u) \leq 0$ , 则节点模板必须做相应的调整, 使其具有迎风效果, 初始模板应改为

$$S^{(0)} = \{x_{j+1}\}$$

### 3 WENO 格式

从插值多项式构造过程可以发现 ENO 是通过比较差商的绝对值的大小来自适应的选择模板, 从而构造出高精度的流通量. 基于以上构造的 ENO 格式有以下不足之处:

(1) 在模板扩展过程中, 考虑了  $k$  个备选模板, 总共包含  $2k-1$  个节点, 却仅仅选择一个模板做插值重构得到具有  $k$  阶精度的数值流通量. 实际上, 如果能够合理利用这  $2k-1$  个节点, 在光滑区域, 可以得到  $2k-1$  阶的精度.

(2) ENO 模板扩展过程中使用了太多的逻辑“if”结构, 这种结构在向量机上的计算效率是非常低的.

(3) 当式 (5) 中  $a^{(m)}$  和  $b^{(m)}$  都非常接近于 0 时, 一个很小的改变都可能改变不等号的方向, 从而选取了不一样的模板. 在光滑区域虽然自适应的模板选取实际上没有必要. 但是, 这种改变可能导致精度的降低.

自 20 世纪 90 年代发展起来的 WENO 格式能够很好的解决以上的问题, WENO 格式利用各个备选模板的凸组合的方式重构, 每个模板的权值也就是组合系数的选取依赖于该模板上数值解的局部光滑性. 这样, 在同样的模板情况下, 在光滑区域, WENO 具有比 ENO 更高的精度, 而在间断附近, 保持了 ENO 所拥有的本质无振荡的性质.

#### 3.1 迎风型 WENO 格式

同样考虑一维标量方程 (1), 首先介绍有限差分 WENO 格式的重构思想. 在网格点  $x = x_j$  上, 有式 (3) 形式的差商逼近, 这里  $\hat{f}_{j+1/2}$  为高阶 WENO 数值流通量. 考虑  $f'(u) \geq 0$  的情况, 假设  $k$  个备选模板记为

$$S_r(j) = \{x_{j-r}, \dots, x_{j-r+k-1}\}, \quad r = 0, \dots, k-1 \quad (6)$$

对  $\hat{f}_{j+1/2}$  每个模板都可以重构得到一个不同的近似值, 从而可得到  $k$  个不同的低阶流通量

$$\begin{aligned} \hat{f}_{j+1/2}^{(r)} &= p^{(r)}(x_{j+1/2}) = \sum_{i=0}^{k-1} c_{ri} f(u_{j-r+i}) \\ r &= 0, \dots, k-1 \end{aligned} \quad (7)$$

这里的  $p^{(r)}(x)$  为模板  $S_r$  上的插值多项式. WENO 就是利用这些低阶的数值流通量的凸组合得到高阶流通量

$$\hat{f}_{j+1/2} = \sum_{r=0}^{k-1} w_r \hat{f}_{j+1/2}^{(r)} \quad (8)$$

现在要做的事情是确定权值  $w_r$ , 来使格式具有高阶精度. 为满足稳定性和相容性, 要求

$$w_r \geq 0, \quad \sum_{r=0}^{k-1} w_r = 1$$

对于函数  $f(u)$  光滑的情形, 如果我们找到了  $d_r$ , 称为线性权 (linear weights), 使得

$$\hat{f}_{j+1/2} = \sum_{r=0}^{k-1} d_r \hat{f}_{j+1/2}^{(r)} \quad (9)$$

具有更高的精度, 一般情况下可以使  $\hat{f}_{j+1/2}$  达到  $2k-1$  阶的精度, 那么就可以把它作为格式的数值流通量. 为确定  $d_r$ , 在大模板  $T = \bigcup_{r=0}^{k-1} S_r$  上构造满足  $2k-1$  阶插值多项式  $P(x)$ , 我们可以通过求解方程

$$P(x_{j+1/2}) = \sum_{r=0}^{k-1} d_r p^{(r)}(x_{j+1/2}) \quad (10)$$

得到  $d_r$ .  $k=3$  时, 有

$$d_0 = \frac{1}{10}, \quad d_1 = \frac{3}{5}, \quad d_2 = \frac{3}{10} \quad (11)$$

由于  $P(x)$  为具有  $2k-1$  阶精度的插值多项式, 因而这样构造的数值流通量在光滑区域满足精度要求.

为了在处理间断问题时, 避免采用线性权而产生的强烈振荡. 须引入光滑因子, 来衡量数值解的陡度和光滑程度. Jiang 和 Shu<sup>[3]</sup> 设计的光滑因子  $\beta_r$  和非线性权  $w_r$  的构造方法得到了普遍的应用

$$\beta_r = \sum_{l=1}^{k-1} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \Delta x^{2l-1} \left( \frac{\partial^l p^{(r)}(x)}{\partial^l x} \right)^2 dx \quad (12)$$

其中  $p^{(r)}(x)$  是在区间  $(x_{j-1/2}, x_{j+1/2})$  上节点模板  $S_r(j)$  的插值多项式. 取  $k=3$  时

$$\beta_0 = \frac{13}{12}(f(u_{j-2}) - 2f(u_{j-1}) + f(u_j))^2 + \frac{1}{4}(f(u_{j-2}) - 4f(u_{j-1}) + 3f(u_j))^2$$

$$\beta_1 = \frac{13}{12}(f(u_{j-1}) - 2f(u_j) + f(u_{j+1}))^2 + \frac{1}{4}(f(u_{j-1}) - f(u_{j+1}))^2$$

$$\beta_2 = \frac{13}{12}(f(u_j) - 2f(u_{j+1}) + f(u_{j+2}))^2 + \frac{1}{4}(3f(u_j) - 4f(u_{j+1}) + f(u_{j+2}))^2$$

然后, 取非线性权  $w_r$  为

$$w_r = \frac{\alpha_r}{\sum_{s=0}^{k-1} \alpha_s}, \quad \alpha_r = \frac{d_r}{(\varepsilon + \beta_r)^2} \quad (13)$$

$r = 0, \dots, k-1$

这里选取的  $\varepsilon$  是较小量, 目的是防止分母为 0, 在大部分的文献中取  $\varepsilon = 10^{-6}$ . 这样, 式 (13) 所得到的权值具有以下性质:

(1) 在光滑区域, 有  $w_r \approx d_r$ , 可以证明在光滑区域格式具有  $2k-1$  阶精度;

(2) 在激波附近, WENO 流通量与 ENO 的流通量相似, 因为在有间断通过的节点模板上权值接近于 0.

如果  $f'(u) \leq 0$ , 则备选节点模板必须做相应的调整, 目的是使节点模板具有迎风效果, 此时只须做与  $f'(u) \geq 0$  的情况相对称的过程就可以重构得到 WENO 流通量的值. 而对于一般的  $f(u)$ , 则必须做流通量分裂

$$f(u) = f^+(u) + f^-(u)$$

使得  $f^+(u) \geq 0, f^-(u) \leq 0$ . WENO 重构可以对  $f^+(u)$  和  $f^-(u)$  分开进行, 然后组合成高阶的流通量. 一种简单的流通量分裂方法是 Lax-Friedrichs 分裂

$$f^\pm(u) = \frac{1}{2}(f(u) \pm \alpha u), \quad \alpha = \max_u |f'(u)| \quad (14)$$

在方程组的情况下, 这里的  $\alpha$  为  $f(u)$  的 Jacobi 矩阵的最大特征值的绝对值.

考虑二维守恒律方程

$$u_t + f(u)_x + g(u)_y = 0 \quad (15)$$

的有限差分 WENO 方法. 在  $(x_j, y_i)$  点重构  $f(u)_x$ , 由于  $f(u)_x$  只是  $x$  的导数, 因此固定网格点上  $y$  方向的值  $y_i$ , 只考虑  $x$  方向, 这样有限差分 WENO 重构实际上是  $x$  方向上的一维重构, 同样, 重构  $g(u)_y$  也只是  $y$  方向上的一维问题. 利用这种思想可以扩展到多维空间中.

有限差分 WENO 格式的优点是编程实现容易, 运行速度快, 特别是对于多维问题其优点特别明显, 比较适合在空间几何尺度较规则的区域应用. 但是对求解区域较复杂的情形, 采用有限体积 WENO 格式较好, 有限体积 WENO 格式对网格的要求可以是不均匀的, 可根据实际需要加密和减疏网格, 但是编程更复杂, 计算速度更慢. 李荫藩等人<sup>[20]</sup> 的综述性文章详细的介绍了双曲守恒律的高阶、高分辨率有限体积法, 其中介绍了有限体积 WENO 格式, 这里就不再重述.

需要说明的是, 有限体积 WENO 格式的线性权是根据网格的局部几何特征和格式的精度决定的, 因此可能会是负值, 而负权的出现会使格式不稳定, 第 3.5 节将介绍采用分裂技巧解决负权问题. 笛卡儿 (Cartesian) 网格上的二维有限体积 WENO 重构可以通过逐维重构 (dimension by dimension) 的方法转化为 2 个一维的 WENO 重构, 首先在一个方向上比如  $y$  方向做一维的 WENO 重构, 然后做  $x$  方向上的重构从而得到所要的结果. 利用这种方法可以减少很多的 CPU 和内存开销.

对于方程组, 可以采用分量形式 (component-wise) 的方法处理, 这种处理方法既简单而且执行速度较快, 能处理很多问题, 尤其是精度要求不很高的情况. 但是当格式要求很高的精度时, 为削减间断附近产生的振荡, 必须采用特征分解的方法.

### 3.2 中心 WENO 格式

中心 WENO 格式通过交错网格的方式来实现重构, 这种格式具有不要求解 Riemann 问题, 不需要特征分解, 不需要进行流通量分裂的优点. 本节将介绍一维和二维的中心 WENO 格式, 我们也是先从一维守恒律方程 (1) 谈起, 定义单元

$$I_j = [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}], \quad I_{j+1/2} = [x_j, x_{j+1}]$$

并且假定单元剖分为均匀

$$\bar{u}_j = \frac{1}{\Delta x} \int_{I_j} u(x, t^n) dx$$

$$\bar{u}_{j+1/2} = \frac{1}{\Delta x} \int_{I_{j+1/2}} u(x, t^n) dx$$

分别表示为  $I_j$  和  $I_{j+1/2}$  上  $u$  的平均值且  $\Delta x = x_{i+1} - x_i$ . 由于即使是光滑的初值条件, 原方程也会产生间断解, 在数值离散中, 我们希望保持一些物理守恒量. 对 (1) 式在  $I_{j+1/2} \times [t^n, t^{n+1}]$  上积分得到以下等价的形式

$$\bar{u}_{j+1/2}^{n+1} = \bar{u}_{j+1/2}^n - \frac{1}{\Delta x} \left[ \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(u(x_{j+1}, t)) dt - \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(u(x_j, t)) dt \right] \quad (16)$$

这是一种有限体积的形式, 这种形式可以利用有限体积方法的优点, 很好的处理间断问题, 中心 WENO 格式正是基于这种形式来构造的. 利用高阶数值积分公式 (Gauss 积分公式, Simpson 积分公式等) 逼近时间积分  $\int_{t^n}^{t^{n+1}} f(u(x_j, t)) dt$

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} f(u(x_j, t)) dt \approx \Delta t \sum_{l=1}^m \gamma_l [f(u(x_j, t^n + \beta_l \Delta t))] \quad (17)$$

流通量时间积分要求能够求解区间  $[t^n, t^{n+1}]$  中间层的值, NCE-Runge-Kutta 方法 (第 4 节讨论) 很好的解决了这个问题, 但是要求重构得到流通量导数值. 假设我们已经知道了时间  $t^n$  整格点单元上的时间平均值  $\{\bar{u}_i^n\}$ , 我们要通过中心 WENO 方法得到  $t^{n+1}$  上半格点单元上的时间平均值  $\{\bar{u}_{i+1/2}^{n+1}\}$ . 由式 (16)

和式 (17), 我们可以知道中心 WENO 重构的目标分为以下 3 个重构步:

- (1) 从  $\{\bar{u}_i^n\}$  出发, 重构得到  $\{\bar{u}_{i+1/2}^n\}$ ;
- (2) 从  $\{\bar{u}_i^n\}$  出发, 重构得到  $\{u_i^n\}$ ;
- (3) 从  $\{u_i^n\}$  出发, 重构得到  $\{f(u)_x |_{x=x_i}\}$ .

前 2 个重构步可以使用相同的光滑因子, 重构步 (3) 的光滑因子与前 2 个重构不同, 因为重构步 (3) 在 NCE-Runge-Kutta 中间层进行. 重构步 (1)、重构步 (2) 的过程如下:

(1) 定义  $k$  个小模板  $S_i = \bigcup_{l=1}^{k-1} \{I_{i+j-l}\}$ ,  $i = 0, \dots, k-1$ , 定义大模板  $T = \bigcup_{i=0}^{k-1} S_i$ .

(2) 在每个小模板  $S_i$  中重构一个  $k-1$  次插值多项式  $p_i(x)$ , 在大模板  $T$  上也可以重构一个  $2k-2$  次的插值多项式记为  $P(x)$ , 使得这些多项式在相应模板中的单元上满足守恒, 即多项式在单元上的平均值不变.

(3) 找到组合系数即线性权. 注意到

$$\bar{u}_{j+1/2}^n = \frac{1}{\Delta x} \left[ \int_{x_j}^{x_{j+1/2}} u(x, t^n) dx + \int_{x_{j+1/2}}^{x_{j+1}} u(x, t^n) dx \right]$$

只需重构  $\frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_j} u(x, t^n) dx$ .

因此重构步 (1) 为寻找  $d_i$  使得

$$\int_{x_{j-1/2}}^{x_j} P(x) dx = \sum_{i=0}^{k-1} d_i \int_{x_{j-1/2}}^{x_j} p_i(x) dx \quad (18)$$

而重构步 (2) 为寻找  $d_i$  使得

$$P(x_j) = \sum_{i=0}^{k-1} d_i p_i(x_j) \quad (19)$$

(4) 使用与迎风型 WENO 格式相类似的做法计算光滑因子的值, 然后分别计算重构步 (1)、重构步 (2) 的非线性权值  $w_i$ , 分别代替式 (18), 式 (19) 中的线性权从而完成重构步 (1)、重构步 (2).

通过几乎同样的过程也可以完成重构步 (3), 只不过重构步 (3) 在每个 NCE-Runge-Kutta 中间层都要进行, 见文献 [10], 表 1, 表 2 分别列出了  $k=3, 5$  情况下的线性权.

到目前为止, 二维中心 WENO 格式没有得到很大的发展, 这是因为二维中心格式需要太多的重构, 编程比较困难, 计算速度较慢, 并且很难发展到较高阶的精度. Levy D 等 [8,9] 构造了 3 阶 Cartesian 网格上的中心 WENO 格式, 设计了一维和二维守恒律方程的 3 阶紧致的中心 WENO (compact central WENO) 格式, 使得格式具有较少的单元模板, 从而

具有较少的计算复杂度. 本文在二维空间上的讨论也仅局限在 Cartesian 网格上.

表 1 5 阶中心 WENO 格式重构的线性权

	$d_0$	$d_1$	$d_2$	精度阶
重构 (1) (均值)	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{16}$	5
重构 (2) (点值)	$-\frac{9}{80}$	$\frac{49}{40}$	$-\frac{9}{80}$	5
重构 (3) (导数)	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	4

定义  $I_{j,k} = [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}] \times [y_{k-1/2}, y_{k+1/2}]$ ,  $I_{j+1/2,k+1/2} = [x_j, x_{j+1}] \times [y_k, y_{k+1}]$ , 假设网格为均匀网格,  $h = \Delta x = \Delta y$ , 考虑式 (15) 在区域  $I_{j+1/2,k+1/2} \times [t^n, t^{n+1}]$  上的积分

$$\begin{aligned} \bar{u}_{j+1/2,k+1/2}^{n+1} &= \bar{u}_{j+1/2,k+1/2}^n - 1/h^2. \\ &\int_{t^n}^{t^{n+1}} \left\{ \int_{y_k}^{y_{k+1}} [f(u(x_{j+1}, y, \tau)) - \right. \\ & f(u(x_j, y, \tau))] dy \Big\} d\tau - 1/h^2. \\ &\int_{t^n}^{t^{n+1}} \left\{ \int_{x_j}^{x_{j+1}} [g(u(x, y_{k+1}, \tau)) - \right. \\ & g(u(x, y_k, \tau))] dx \Big\} d\tau \end{aligned} \quad (20)$$

其中  $\bar{u}_{j+1/2,k+1/2}$  表示为单元  $I_{j+1/2,k+1/2}$  上的平均值  $\bar{u}_{j+1/2,k+1/2} = \frac{1}{h^2} \int_{I_{j+1/2,k+1/2}} u dx dy$ . 利用数值积分公式 (20) 逼近流通量的时间积分, 采用下式逼近空间积分

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x) dx = \frac{h}{24} [-f(x_{j+2}) + 13f(x_{j+1}) + 13f(x_j) - f(x_{j-1})] + O(h^4) \quad (21)$$

时间积分要求得到  $[t^n, t^{n+1}]$  中间层的值, 采用 NCE-Runge-Kutta 方法解决了这个问题. 很自然, 与一维情况类似, 中心格式要求完成 3 种类型的二维重构: (1) 重构单元平均值; (2) 重构点值; (3) 由点值重构导数值.

沿着一维的重构方法可以很清楚的知道二维中心 WENO 格式的重构过程. 选取 9 个小模板  $S_{s,t}$ ,  $s, t = -1, 0, 1$ , 每个模板包含  $3 \times 3$  个单元  $I_{j+s,k+t}$ . 在每个小模板上构造一个二次  $(x, y)$  的插值多项式  $p_{j+s,k+t}(x)$ , 满足相应的单元平均条件. 让  $T = \bigcup_{s,t=-1}^1 S_{s,t}$ , 同样构造一个四次的插值多项式满足单元平均条件. 在此基础上进行 WENO 重构. 需要说明的是, 这里的光滑因子

$$\begin{aligned} \beta_{j,k}^{s,t} &= \sum_{|\alpha|=1,2} \iint_{I_{j,k}} h^{2(|\alpha|-1)} \\ & (D^\alpha p_{j+s,k+t}(x - x_{j+s}, y - y_{k+t}))^2 dx dy \end{aligned}$$

二维 WENO 重构会遇到不能决定线性权的情况, 这里采用的办法是使选取的线性权尽可能多的消去截断误差展开项, 但是格式的精度将会降低.

与迎风型的 WENO 格式相比, CWENO 的一大好处在于处理方程组时不需要特征分解, 在低阶情况下确实如此, 但是当格式精度要求较高时 CWENO 格式在激波附近会产生振荡, 精度越高振荡越明显, 此时, CWENO 格式同样必须经过局部特征分解. Qiu 和 Shu<sup>[10]</sup> 对该问题做了很详细的讨论与比较. 由于重构 (3) 使格式降低了一阶精度, 为使精度不降低, 可以采用重构导数时使用迎风 WENO 重构.

由于使用交错网格实现的中心 WENO 格式需要太多的重构, 从而使操作上比较困难, 并且不能在无结构网格中采用中心 WENO 方法, 因此在实际中还没有看到很好的应用, 也正是这个原因, 中心 WENO 没有象迎风型的 WENO 那样得到了广泛的研究.

表 2 9 阶中心 WENO 格式重构的线性权

	$d_0$	$d_1$	$d_2$	$d_3$	$d_4$	精度阶
重构 (1) (均值)	$\frac{5}{256}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{63}{128}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{5}{256}$	9
重构 (2) (点值)	$-\frac{525}{163584}$	$\frac{63425}{286272}$	$\frac{11689}{8064}$	$-\frac{63425}{286272}$	$-\frac{525}{163584}$	9
重构 (3) (导数)	$\frac{1}{70}$	$\frac{8}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{8}{35}$	$\frac{1}{70}$	8

### 3.3 紧致中心 WENO 格式

紧致的 3 阶 CWENO 重构是基于不同模板尺度的插值的凸组合的基础上进行的, 因而与一般的中心 WENO 相比, 它们在小模板上的插值多项式不相同. 考虑一维情况, 对  $\bar{u}_{j+l}^n$ ,  $l = -1, 0, 1$  可插值得到二次多项式  $P_j(x) = P_{\text{OPT}}(x)$  使其满足守恒的性质. 如果仅使用这个多项式去做逼近的话, 那么在间断区域或者有大梯度发生的地方将会产生振荡. 为此, 在单元  $I_j$  上, 把  $P_j(x)$  表示如下

$$\begin{aligned} P_j(x) &= \sum_i w_i^j p_i^j(x) \\ \sum_i w_i^j &= 1, \quad w_i^j \geq 0 \\ i &\in \{L, C, R\} \end{aligned} \quad (22)$$

其中  $p_L, p_R$  分别为基于左边模板  $\{I_{j-1}, I_j\}$  和右边模板  $\{I_j, I_{j+1}\}$  的线性插值函数. 现在要求的是多项式  $p_C$ , 使得凸组合 (22) 在光滑区域具有 3 阶精度, 即必须满足

$$\begin{aligned} P_{\text{OPT}}(x) &= d_L p_L(x) + d_C p_C(x) + d_R p_R(x) \\ d_L + d_C + d_R &= 1 \end{aligned} \quad (23)$$

由于对任意对称的正常数  $d_i$  都满足精度要求, 为此可选取  $d_L = d_R = 1/2, d_C = 1/2$ , 从而有

$$p_C(x) = 2P_{\text{OPT}}(x) - \frac{1}{2}(p_L(x) + p_R(x)) \quad (24)$$

这样, 在确定了多项式  $p_i(x)$  以及线性权  $d_i$  以后, 我们就可以利用式 (12) 计算光滑因子  $\beta_i$ , 从而可计算得到非线性权  $w_i$ , 利用与中心 WENO 相类似的过程得到数值解.

扩展到二维情况, 选取 5 个单元模板

$$\begin{aligned} S_{NE} &= \bigcup_{s,t=0,1} \{I_{j+s,k+t}\} \\ S_{NW} &= \bigcup_{s=0,-1;t=0,1} \{I_{j+s,k+t}\} \\ S_{SE} &= \bigcup_{s=0,1;t=0,-1} \{I_{j+s,k+t}\} \\ S_{SW} &= \bigcup_{s,t=0,-1} \{I_{j+s,k+t}\} \\ S_C &= \bigcup_{s,t=-1,0,1} \{I_{j+s,k+t}\} \end{aligned}$$

在  $S_{NE}, S_{NW}, S_{SE}, S_{SW}$  上构造线性插值多项式  $p_{NE}, p_{NW}, p_{SE}, p_{SW}$ . 让  $T = S_C$ , 为九单元的模板, 在模板  $T$  上构造具有 3 阶精度的二次插值多项式

$P_{\text{OPT}}$ , 可直接选取线性权值  $d_{NE} = d_{NW} = d_{SE} = d_{SW} = 1/8, d_C = 1/2$ , 则可令  $S_C$  上的二次多项式

$$P_C = 2P_{\text{OPT}} - \frac{1}{2}(p_{NE} + p_{NW} + p_{SE} + p_{SW}) \quad (25)$$

满足精度要求, 在此基础上进行接下来的重构步.

紧致中心 WENO 格式在光滑区域具有 3 阶精度, 在有间断的地方, 使用的非线性权会自动的调整模板, 使格式具有与 ENO 相类似的性质, 从而有效的避免了振荡. 但是与一般的 WENO 相比而言, 紧致中心 WENO 格式也是非常复杂的, 并且构造得到的精度没有 WENO 高. 虽然扩展三阶紧致的中心 WENO 的这种做法可以构造出 5 阶和更高阶的中心无振荡格式, 但是计算复杂度也会大大的增加, 我们认为以此为代价来提高精度并不值得.

### 3.4 优化 WENO 格式

Wang 和 Chan<sup>[21]</sup> 设计了优化 WENO (optimized WENO, OWENO) 格式解决计算航空声学 (computational aeroacoustics, CAA) 问题. CAA 问题不同于其它问题, 因为其主控频率通常很高. 因此, 在 CAA 中发展了很多独立的算法, 如 DRP (dispersion-relation-preserving)<sup>[22]</sup> 有限差分格式等. DRP 格式的主要想法是优化格式的系数, 其出发点不是使格式的截断误差最小, 而是采用了另一类型的误差, 使之最小.

DRP 格式又称为优化格式 (optimize schemes). OWENO 格式具有 DRP 和 WENO 格式的优点, 为介绍基本思想, 考虑线性标量波方程

$$u_t + au_x = 0, \quad a > 0$$

初值条件  $u(x, 0) = u_0(x)$ . 有半离散的差分逼近

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + \frac{a}{\Delta x} (\hat{u}_{j+1/2}^r - \hat{u}_{j-1/2}^r) = 0$$

其中

$$\begin{aligned} \hat{u}_{j+1/2}^r &= \hat{u}_{j+1/2}^r(u_{j-r}, \dots, u_{j+s}) = \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} c_{ri} u_{j-r+i} \end{aligned} \quad (26)$$

这里  $r \geq 0, s \geq 0, r + s + 1 = k$ ,  $k$  为节点模板的元素个数. 通常的差分格式设计方法是通过 Taylor 展开格式的两边  $\Delta x$  相同次数的项相等, 从而确定系数  $c_{ri}$ , 并且达到  $k$  阶的精度. 优化格式则使用另外的方法确定系数  $c_{ri}$ . 通过对格式两边做 Fourier 展开, 在所在的节点模板上, 得到数值波数

$$\bar{\alpha}^r = -\frac{\sqrt{-1}}{\Delta x} \sum_{i=-r}^s c_{r,i+r} \exp(\sqrt{-1} i \alpha \Delta x) \cdot [1 - \exp(-\sqrt{-1} \alpha \Delta x)] \quad (27)$$

其中  $\alpha$  为实际波数, 优化思想就是使固定区间上数值波数  $\bar{\alpha}^r$  和实际波数  $\alpha$  之差的  $L_2$  模

$$E_r = \int_{-\alpha_0 \Delta x}^{\alpha_0 \Delta x} \{\lambda [\operatorname{Re}(\bar{\alpha}^r \Delta x) - \alpha \Delta x]^2 + (1 - \lambda) [\operatorname{Im}(\bar{\alpha}^r \Delta x)]^2\} d(\alpha \Delta x) \quad (28)$$

最小来决定, 显然  $E_r$  最小的条件为

$$\frac{\partial E_r}{\partial c_{ri}} = 0, \quad i = 0, \dots, k-1 \quad (29)$$

解这个方程组可以得到系数  $c_{ri}$ .

OWENO 格式则是由优化格式与 WENO 格式相结合的方式求解系数  $c_{ri}$ . 为得到  $p_1$  阶精度的差分格式,  $p_1 \leq k$ , 在给定的模板上, 使用 Taylor 展开使格式的两边  $\Delta x$  前  $p_1$  项相同次数的项相等, 那么可得到关于  $c_{ri}$  的  $p_1$  个线性方程, 具有  $p_1$  阶的精度. 我们有

$$\bar{\alpha}^r = \alpha + O(\alpha \Delta x)^{p_1} \quad (30)$$

我们需要另外的  $k - p_1$  个方程才能确定所有系数  $c_{ri}$ . 这几个方程通过利用优化思想最小化固定区间  $[-\alpha_0 \Delta x, \alpha_0 \Delta x]$  上  $E_r$  来得到.

考虑 OWENO 格式的设计方法, 在  $k$  个备选模板  $S_r = \{x_{j-r}, \dots, x_{j+k-r-1}\}$ ,  $r = 0, \dots, k-1$  上, 分别利用 Taylor 展开, 满足  $p_1$  阶精度得到  $p_1$  个关于  $c_{ri}$  方程

$$\sum_{i=0}^{k-1} b_{li} c_{ri} = z_l, \quad l = 1, \dots, p_1 \quad (31)$$

其中  $b_{li}$ ,  $z_l$  都是常数, 将其代入到  $E_r$  中, 可消去  $p_1$  个变量  $c_{r0}, c_{r1}, \dots, c_{rp_1-1}$ , 从而得到  $E_r = E_r(c_{rp_1}, \dots, c_{rk-1})$ , 通过最小化  $E_r$ , 有

$$\frac{\partial E_r}{\partial c_{ri}} = 0, \quad i = p_1, \dots, k-1$$

由此加上 (31) 得到了  $k$  个方程, 从而可解出系数  $c_{ri}$ .

我们已经在每个小模板上都得到了一个具有  $p_1$  阶精度的数值流通量, 接下来的一步是, 由这  $k$  个模板上构造的低阶流通量的凸组合得到 OWENO 格式

的数值流通量, 即  $\hat{u}_{j+1/2}^{\text{OWENO}} = \sum_{r=0}^{k-1} d_r \hat{u}_{j+1/2}^r$ , 目的是选取  $d_r$ , 使得有

$$\frac{1}{\Delta x} (\hat{u}_{j+1/2}^{\text{OWENO}} - \hat{u}_{j-1/2}^{\text{OWENO}}) = \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_j + O(\Delta x^{p_1+p_2}) \quad (32)$$

其中  $\sum_{r=0}^{k-1} d_r = 1$ ,  $p_2 \leq k-1$ . 使用与求解  $c_{ri}$  相类似的方法求解  $d_r$ , 首先由上式得 Taylor 展开可决定关于  $d_r$  的  $p_2$  个方程, 另外的  $k-1-p_2$  个方程通过最小化 (28) 式中的  $E_r$  得到, 不过这里的  $\bar{\alpha}^r$  要用  $\bar{\alpha} = \sum_{r=0}^{k-1} d_r \bar{\alpha}^r$  代替. 虽然  $d_r$  的决定与第一步  $c_{ri}$  的决定过程非常相似, 但是, 当有间断发生时, 必须引入光滑因子来确定非线性权  $w_r$  代替权值  $d_r$ .

确定权值以后就可以沿着 WENO 格式相同的步骤往下做.

### 3.5 负权的处理

下面介绍 Shi J 等 [23] 设计的负权问题的处理方法, 使用该方法只增加了很少的计算开销, 但是却非常有效, 很好的解决了负权引起的不稳定的问题. 如果线性权  $\{d_i\}_{i=0}^{q-1}$  中出现了负值, 则我们把线性权分裂成两组

$$\begin{aligned} \tilde{d}_i^+ &= \frac{1}{2}(d_i + 3|d_i|) \\ \tilde{d}_i^- &= \tilde{d}_i^+ - d_i, \quad i = 0, \dots, q-1 \end{aligned}$$

让

$$\begin{aligned} \sigma^\pm &= \sum_{j=0}^{q-1} \tilde{d}_j^\pm \\ d_i^\pm &= \tilde{d}_i^\pm / \sigma^\pm, \quad i = 0, \dots, q-1 \end{aligned}$$

再独立利用上面两组线性权  $d_j^\pm$  作 WENO 重构, 使用相同的光滑因子计算非线性权值  $w_j^\pm$ . 最后的 WENO 重构结果为使用  $\{d_i^+\}$  得到的重构值的  $\sigma^+$  倍减去使用  $\{d_i^-\}$  得到的重构值的  $\sigma^-$  倍. 这种分解的目的是使得每个模板的组合系数要么全是正值, 要么全是负值. 考虑一维 5 阶中心 WENO 格式的重构步 (2), 有线性权

$$d_0 = -\frac{9}{80}, \quad d_1 = \frac{9}{40}, \quad d_2 = -\frac{9}{80}$$

由于有负数存在, 对其做以上的分裂, 可得到

$$\sigma^+ = \frac{107}{40}, \quad \sigma^- = \frac{67}{40}$$



$$d_0^+ = \frac{9}{214}, \quad d_1^+ = \frac{98}{107}, \quad d_2^+ = \frac{9}{214}$$

$$d_0^- = \frac{9}{67}, \quad d_1^- = \frac{49}{67}, \quad d_2^- = \frac{9}{67}$$

考虑对间断函数  $u(x)$  的空间逼近, 当  $x \leq 0$  时,  $u(x) = 2x$ , 当  $x > 0$  时  $u(x) = -20$ . 这里, 网格点

$x_i = (i - 0.4965)\Delta x$ ,  $\Delta x = 0.02$ . 结果如图 1 所示, 图 1(a) 为使用负权的 WENO 重构  $u(x_i)$ , 图 1(b) 为利用分裂方法处理负权后的 WENO 重构得到  $u(x_i)$ . 我们可以发现直接使用负权去做 WENO 重构会在间断附近产生非物理的振荡, 经过分裂方法处理后, 这种不稳定现象被很好的消除了.

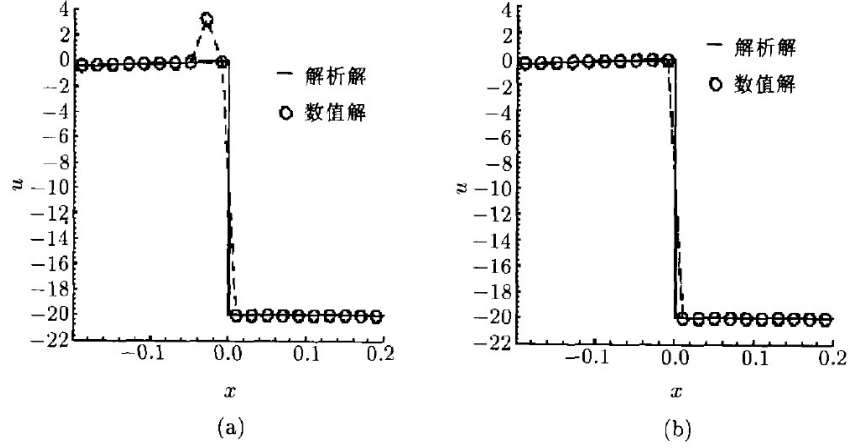


图 1 不同重构方法比较

#### 4 时间离散化

现在讨论时间离散化的问题, 在迎风型的 WENO 格式中, 采用 TVD-Runge-Kutta 方法求解常微分方程

$$u_t = L(u, t) \quad (33)$$

$$u(t_0) = u_0$$

其中  $L(u, t)$  是空间离散化算子. 时间离散格式的目的是逐时间层求解空间离散的方程. 在此仅介绍 3 阶的 TVD-Runge-Kutta 方法. 假设第  $n$  时间层上的  $u$  值  $u^n$  为已知, 则有

$$u^{(1)} = u^n + \Delta t L(u^n, t^n)$$

$$u^{(2)} = \frac{3}{4}u^n + \frac{1}{4}u^{(1)} + \frac{1}{4}\Delta t L(u^{(1)}, t^n + \Delta t)$$

$$u^{n+1} = \frac{1}{3}u^n + \frac{2}{3}u^{(2)} + \frac{2}{3}\Delta t L(u^{(2)}, t^n + \frac{1}{2}\Delta t) \quad (34)$$

其中  $\Delta t$  为时间步长. 可以证明存在  $\Delta t_0$ , 当时间步长  $\Delta t \leq c\Delta t_0$  (其中  $c$  为 CFL 数) 时, 格式 (34) 稳定, 并且具有 TVD 的性质.

Zennaro<sup>[24]</sup> 发展了 NCE-Runge-Kutta 方法, 使得使用该方法可以求得  $t^n$  到  $t^{n+1}$  之间任意中间层的值, 中心 WENO 格式采用该方法解决时间推进问题. 在此, 我们也只作简单的介绍, 仅仅介绍 4 阶

NCE-Runge-Kutta 方法. 首先考虑问题 (33) 的 4 阶 Runge-Kutta 方法

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t \sum_{j=1}^4 b_j g^{(j)} \quad (35)$$

这里

$$b_1 = b_4 = \frac{1}{6}, \quad b_2 = b_3 = \frac{1}{3}$$

$$g^{(1)} = L(u^n, t^n)$$

$$g^{(2)} = L(u^n + \frac{\Delta t}{2}g^{(1)}, t^n + c_2\Delta t)$$

$$g^{(3)} = L(u^n + \frac{\Delta t}{2}g^{(2)}, t^n + c_3\Delta t)$$

$$g^{(4)} = L(u^n + \Delta t g^{(3)}, t^n + c_4\Delta t)$$

$$c_2 = c_3 = \frac{1}{2}, \quad c_4 = 1$$

4 阶 Runge-Kutta 方法不是 TVD 的方法, 但是可以经过一些改进之后使之具有 TVD 的性质. 下面介绍 4 阶 NCE-Runge-Kutta 方法, 有三次多项式

$$b_1(\theta) = 2(1 - 4b_1)\theta^3 + 3(3b_1 - 1)\theta^2 + \theta$$

$$b_j(\theta) = 4(3c_j - 2)b_j\theta^3 + 3(3 - 4c_j)b_j\theta^2 \quad (36)$$

$$j = 2, 3, 4$$

令

$$u^{n+\theta} = u^n + \Delta t \sum_{j=1}^4 b_j(\theta) g^{(j)}, 0 \leq \theta \leq 1 \quad (37)$$

用它去逼近  $u(t^n + \theta\Delta t)$  具有 4 阶的精度, 这样, 在每一时间步内, 利用 NCE-Runge-Kutta 方法可以求得任意的中间值的逼近.

Runge-Kutta 时间方法完美的解决了时间变量的高精度离散问题, 为空间变量的高精度离散提供了强有力的支持, 很好的推动了 WENO 型格式的发展.

另一种时间离散方法是基于 Taylor 展开的 Lax-Wendroff 型的时间离散方法, Shu<sup>[25]</sup> 对该方法有一些介绍. 基于该方法的应用较少, 因为对方程组问题这种离散方法太复杂, 但是邱建贤等<sup>[26]</sup> 近期的工作通过尽量的减少特征分解和尽量用线性权代替非线性权的方法, 基于这种技巧的 Lax-Wendroff 方法能够大大的缩短计算时间, 从而提高计算效率.

## 5 数值算例

本节利用一些一维和二维问题上的数值算例来测试 ENO, WENO 和中心 WENO 格式的精度, 以及这些格式处理激波的能力. 证明这些格式的确具有高精度, 高分辨率的性质.

### 例 1 精度测试算例, 考虑单行波方程

$$u_t + u_x = 0 \quad (38)$$

初值条件为  $u(x, 0) = \sin(2\pi x)$ , 采用周期边界条件. 每个周期剖分为  $N$  个均匀网格单元, 计算到 2 个周期以后即时间  $T = 2$ , 表 3 所示的是 ENO 和 WENO 格式以及中心 WENO 格式的结果. 可以发现这些格式都基本达到了理论上的精度要求.

例 2 激波管问题. 考虑一维非线性 Euler 方程组

$$U_t + f(U)_x = 0 \quad (39)$$

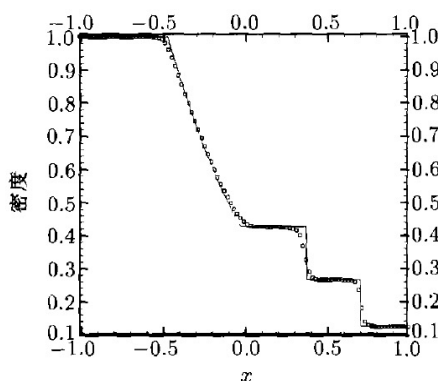
其中

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{pmatrix}, \quad f(U) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho u^2 + p \\ (E + p)u \end{pmatrix}$$

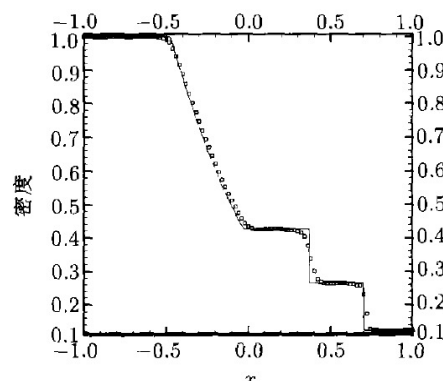
总能量  $E = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}\rho u^2$ ,  $\gamma = 1.4$ . Sod 激波管问题具有 Riemann 初值条件: 当  $x \leq 0$ ,  $(\rho_L, u_L, p_L) = (1, 0, 1)$ ; 当  $x > 0$ ,  $(\rho_R, u_R, p_R) = (0.125, 0, 0.1)$ . Lax 激波管问题具有 Riemann 初值条件: 当  $x \leq 0$ ,  $(\rho_L, u_L, p_L) = (0.445, 0.698, 3.528)$ ; 当  $x > 0$ ,  $(\rho_R, u_R, p_R) = (0.5, 0, 0.571)$ . 计算区域取为  $[-1, 1]$ . 图 2 分别为利用 WENO 格式求解 Sod 和 Lax 激波

表 3 ENO, WENO 和中心 WENO 格式计算结果

N	5 阶 ENO		5 阶 WENO		5 阶中心 WENO	
	$L_1$ 误差	精度阶	$L_1$ 误差	精度阶	$L_1$ 误差	精度阶
10	1.3279E-2	—	5.4956E-2	—	5.3212E-1	—
20	4.3787E-4	4.9225	2.5768E-3	4.4146	4.2426E-2	3.3688
40	1.3891E-5	4.9783	8.5355E-5	4.9160	1.9437E-3	4.4481
80	4.3457E-7	4.9984	2.8954E-6	4.8816	5.5110E-5	5.1404
160	1.3584E-8	4.9996	9.4261E-8	4.9410	1.6619E-6	5.0514
320	4.3241E-10	4.9734	2.9719E-9	4.9872	5.1856E-8	5.0022

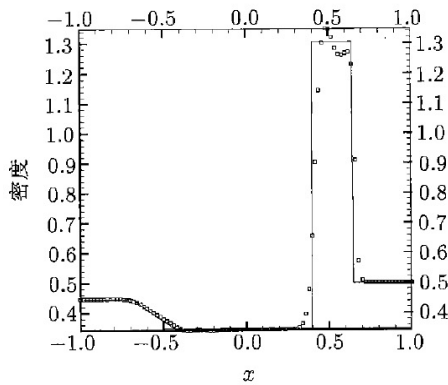


(a) Sod, 5 阶 WENO

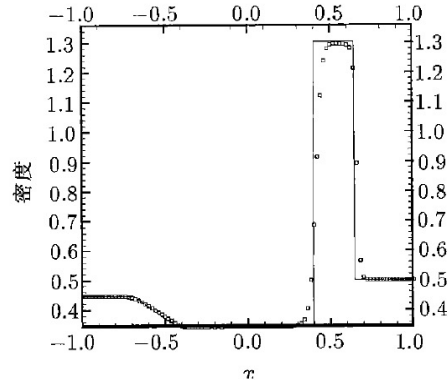


(b) Sod, 5 阶 CWENO

图 2 WENO 求解激波管问题密度图



(c) Lax, 5 阶 CWENO 分量形式



(d) Lax, 5 阶 CWENO 特征分解

图 2 WENO 求解激波管问题密度图 (续)

管问题得到的密度图, Sod 问题计算到时间  $T = 0.4$ , Lax 问题计算到  $T = 0.26$ ,  $N = 100$ . 计算结果表明在处理方程组问题时, 采用分量形式的 WENO 在激波附近重构会产生一些振荡, 而经特征分解后的 WENO 重构能很好的解决间断问题.

接下来看看二维问题, 我们将从文后参考文献中挑选一些算例来分析问题, 证明 WENO 格式在处理多维问题时也具有高分辨率的性质, 更加详细的计算结果可参照 Shu 等人的结果等 [2~6, 21~38].

### 例 3 二维 Burgers 方程

$$u_t + (u^2/2)_x + (u^2/2)_y = 0 \quad (40)$$

初值条件为  $u_0(x) = 0.3 + 0.7 \sin(\pi/2(x+y))$ ,  $-2 \leq x \leq 2$ ,  $-2 \leq y \leq 2$ , 采用周期边界条件. 计算到时间  $T = 5/\pi^2$ , 此时, Burgers 方程产生间断. 计算结果如图 3 所示, 可以发现, 无论是有限差分格式还是无结构网格上的有限体积格式, WENO 方法都能使激波传输非常锐利, 并且不产生虚假振荡.

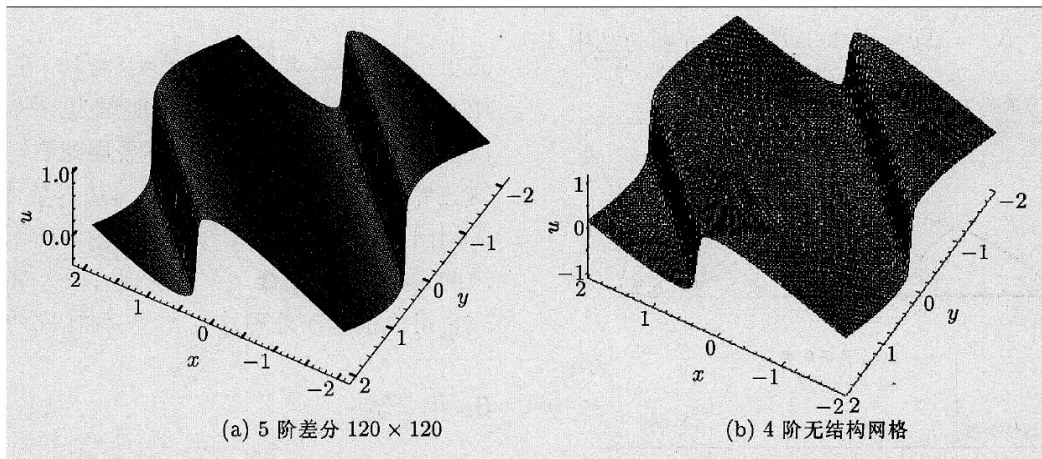


图 3 Burgers 方程 WENO 方法

**例 4** 马赫数为 3 的前台阶问题. 马赫数为 3 的流动流过一个含有台阶的风洞管道, 管道长为 3, 宽为 1, 台阶在距管道左端 0.6 处, 高为 0.2. 初始时刻管道内充满理想气体,  $\gamma = 1.4$ , 密度  $\rho = 1.4$ , 压力  $p = 1.0$ ,  $x$  方向的速度  $u = 3.0$ ,  $y$  方向的速度  $v = 0.0$ . 左、右边界分别用入流和出流条件, 上、下边界 (包括台阶) 用反射边界条件. 计算结果如图 4 所示, 图

4(a) 为三角网格剖分方法, 图 4(b) 为 WENO 在无结构网格上计算得到的密度等值线图. 图 4 中画出了 30 条等值线, 计算到时间  $T = 4.0$ . 可以发现有限体积 WENO 格式可以发挥网格剖分比较随意的特点, 根据需要加密或减疏网格, 从而较好的模拟具体问题.

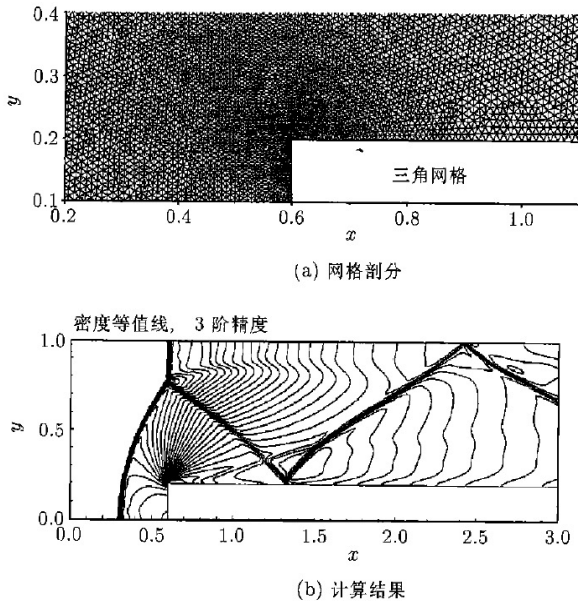


图 4 前台阶流问题的密度等值线图

**例 5 双马赫反射问题.** 马赫数为 10 的激波, 以  $60^\circ$  角在墙上反射, 未扰流体的密度  $\rho = 1.4$ , 压力  $p = 1.0$ . 计算区域  $[0, 4] \times [0, 1]$ , 反射墙位于区域底边  $1/6 < x < 4$ . 左右边界分别以入流出流条件, 在底边上  $0 < x < 1/6$  的部分赋以准确的波后条件, 其余部分是反射墙, 上边界是马赫数为 10 的激波精确解, 即以激波速度移动, 波头左边赋以波后条件, 右边赋以波前条件, 计算到  $T = 0.2$ . 计算结果如图 5 所示,  $\Delta x = \Delta y = 1/200$ , 图 5 中分别为利用 4

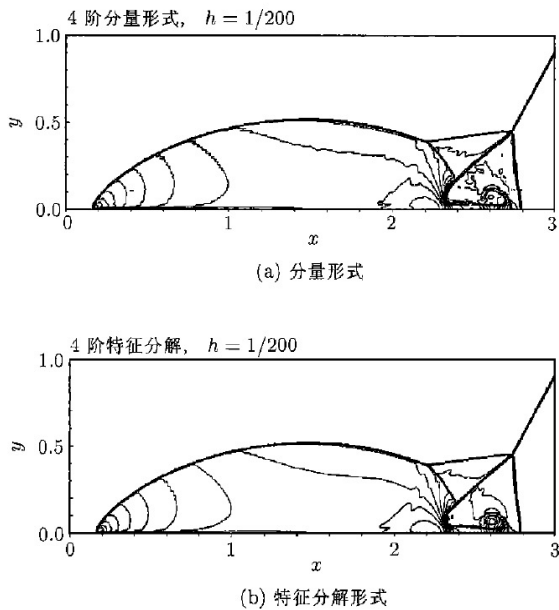


图 5 双马赫反射问题的密度等值线图

阶 WENO 格式计算得到的密度等值线图, 图 5 中画出了 30 条等值线. 可以发现, 在处理复杂结构问题

时, 特征分解的 WENO 格式比分量形式的 WENO 格式产生的虚假振荡更少.

**例 6 圆柱绕流问题.** 在这个例子里, 使用有限差分 WENO 格式模拟超音速流经过圆柱的问题. 单位半径的圆柱立于  $x-y$  物理平面上, 在  $\xi-\eta$  计算

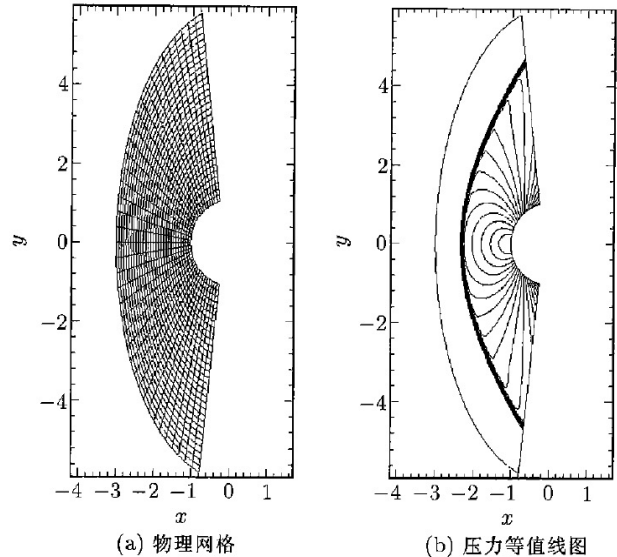


图 6 圆柱绕流问题

平面上取计算域为  $[0, 1] \times [0, 1]$ . 计算域和物理域的映射关系为

$$\begin{aligned} x &= (R_x - (R_x - 1)\xi) \cos(\theta(2\eta - 1)) \\ y &= (R_y - (R_y - 1)\xi) \sin(\theta(2\eta - 1)) \end{aligned} \quad (41)$$

这里, 取  $R_x = 3, R_y = 6, \theta = 5\pi/12$ . 在计算域中使用  $60 \times 80$  的均匀网格. 初始时刻为一马赫数为 3 的激波从左向圆柱移动, 在圆柱表面即  $\xi = 1$  时使用反射边界条件, 在  $\xi = 0$  使用入流边界条件,  $\eta = 0, 1$  采用出流边界条件. 计算结果如图 6 所示, 图 6 中所画的是 20 条等值线. 可以发现有限差分 WENO 格式也可以很好的处理这种类型的曲线边界的问题.

## 6 小结

双曲守恒律方程数值解法的研究一直是微分方程数值解的重要课题之一, 有着十分广泛的应用, 我们可以从文献 [39, 40] 了解一些求解双曲守恒方程的重要的数值方法. 有限差分方法和有限体积方法是求解双曲守恒方程的两类重要方法, 有限差分方法由于简单灵活, 被广泛的研究, 但是并不适合复杂区域的计算; 而有限体积方法由于保持了物理量的守恒, 并且网格划分比较随意, 近些年来, 已成为模拟复杂流动的重要方法. 有限差分 and 有限体积类的 WENO 格式由于具有高精度, 高分辨率的良好性质, 使其得到

了广泛的研究,并且在实际问题中具有良好的应用.

## 参 考 文 献

- 1 Harten A, Engquist B, Osher S, Chakaravathy S. Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes III. *J Comput Phys*, 1987, 71: 231~303
- 2 Liu X D, Osher S, Chan T. Weighted essentially non-oscillatory schemes. *J Comput Phys*, 1994, 115: 200~212
- 3 Jiang G S, Shu C W. Efficient implementation of weighted ENO schemes. *J Comput Phys*, 1996, 126: 202~228
- 4 Friedrichs O. Weighted essentially non-oscillatory schemes for the interpolation of mean values on unstructured grids. *J Comput Phys*, 1998, 144: 194~212
- 5 Hu C, Shu C W. Weighted essentially non-oscillatory schemes on triangular meshes. *J Comput Phys*, 1999, 150: 97~127
- 6 Balsara D, Shu C W. Monotonicity preserving weighted essentially non-oscillatory schemes with increasingly high order accuracy. *J Comput Phys*, 2000, 160: 405~452
- 7 Levy D, Puppo G, Russo G. On the behavior of the total variation in CWENO methods for conservation laws. *Appl Numer Math*, 2000, 33: 407~414
- 8 Levy D, Puppo G, Russo G. A third order central WENO scheme for 2D conservation laws. *Appl Numer Math*, 2000, 33: 415~421
- 9 Levy D, Puppo G, Russo G. Compact central WENO schemes for multidimensional conservation laws. *SIAM J Sci Comput*, 2000, 22: 656~672
- 10 Qiu J X, Shu C W. On the construction, comparison and local characteristic decomposition for high order central WENO schemes. *J Comput Phys*, 2002, 183: 187~209
- 11 Lele S. Compact finite difference schemes with spectral-resolution. *J Comput Phys*, 1992, 103: 16~42
- 12 Cockburn B, Shu C W. Nonlinearly stable compact scheme for shock calculations. *SIAM J Numer Anal*, 1994, 31: 16~42
- 13 Deng Xiaogang, Zhang Hanxin. Developing high-order weighted compact nonlinear schemes. *J Comput Phys*, 2000, 165: 22~44
- 14 Wang Z, Huang G P. An essentially non-oscillatory high-order Padé-type(ENO-Padé) scheme. *J Comput Phys*, 2002, 177: 37~58
- 15 Cockburn B. Discontinuous Galerkin methods for convection-dominated problems. In: Barth T, Deconinck H, eds. High-Order Methods for Computational Physics, Lect Notes Comput Sci Eng 10. Berlin: Springer-verlag, 1999. 69~224
- 16 张增产, 沈孟育. 改进的时空守恒元和解元方法. 清华大学学报(自然科学版), 1997, 8: 65~68
- 17 沈孟育, 李海东, 刘秋生. 用解析离散法构造 WENO-FCT 格式. 空气动力学学报, 1998, 16: 56~63
- 18 侯中喜, 梁剑寒, 王承尧. WENO 格式在稳态问题中的应用. 空气动力学学报, 2001, 19: 75~82
- 19 侯中喜, 王正华, 王承尧. CFD 中高格式的分区分并行计算研究. 空气动力学学报, 2002, 20: 7~13
- 20 李荫藩, 宋松和, 周铁. 双曲守恒律的高阶, 高分辨有限体积法. 力学进展, 2001, 31(2): 245~262
- 21 Wang Z J, Chen R F. Optimized weighted essentially non-oscillatory schemes for linear waves with discontinuity. *J Comput Phys*, 2001, 174: 381~404
- 22 Tam K W, Webb C. Dispersion-relation-preserving finite difference schemes for computational acoustics. *J Comput Phys*, 1993, 107: 262~281
- 23 Shi J, Hu C, Shu C W. A technique of treating negative weights in WENO scheme. ICASE Report No. 2000-49
- 24 Zennaro M. Natural continuous extensions of Runge-Kutta Methods. *Math Comp*, 1986, 46: 119~133
- 25 Shu C W. Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes for hyperbolic conservation laws. ICASE Report No. 1997-65
- 26 Qiu J, Shu C W. Finite difference WENO schemes with Lax-Wendroff type time discretizations. *SIAM J Sci Comput*, 2003, 24: 2185~2198
- 27 Montarnal P, Shu C W. Real gas computation using an energy relaxation method and high-order WENO schemes. *J Comput Phys*, 1999, 148: 59~80
- 28 Shu C W. High order finite difference and finite volume WENO schemes and discontinuous Galerkin methods for CFD. ICASE Report No. 2001-11
- 29 Harten A. On high-order accurate interpolation for non-oscillatory shock capturing schemes. In: Dafermos C, Ericksen J L, Kinderlehrer D, et al, eds. Oscillation Theory, Computation and Methods of Compensated Compactness. New York: Springer-Verlag, 1986. 71~105
- 30 Harten A, Osher S. Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes, I. *SIAM J Numer Ana*, 1987, 24: 279~309
- 31 Harten A, Engquist B, Osher S, Chakaravathy S. Some results on uniformly high order essentially non-oscillatory schemes. *Appl Numer Math*, 1986, 2: 347~377
- 32 Harten A. ENO schemes with subcell resolution. *J Comput Phys*, 1989, 83: 148
- 33 Shu C W, Osher S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shocks capturing schemes II. *J Comput Phys*, 1989, 83: 32~78
- 34 Shu C W. Numerical experiments on the accuracy of ENO and modified ENO schemes. *J Sci Computing*, 1990, 5: 127~149
- 35 Shu C W, Zang T A, Erlebacher G, et al. High-order ENO schemes applied to two- and three-dimensional compressible flow. *Appl Numer Math*, 1992, 9: 45~54
- 36 Weinan E, Shu C W. A numerical resolution study of high essentially non-oscillatory schemes applied to incompressible flow. *J Comput Phys*, 1994, 110: 39

- 37 Shu C W. High Order ENO and WENO Schemes. In: Barth T J and Deconinck H, eds. High Order Methods for computational Physics. Lecture Notes in Computational Science and Engineering (9). Springer-Verlag, 1999
- 38 Stanescu D, Habashi W G. Essentially non-oscillatory Euler solutions on unstructured meshes using extrapolation. *AIAA J*, 1998, 30: 1413~1416
- 39 刘儒勋, 王志峰. 数值模拟方法和运动界面追踪. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2001. 10
- 40 水鸿寿. 一维流体力学差分方法. 北京: 国防工业出版社, 1998

## ADVANCES IN WEIGHTED ESSENTIALLY NON-OSCILLATORY SCHEMES FOR HYPERBOLIC CONSERVATION LAWS\*

XU Zhenli      LIU Ruxun      QIU Jianxian

Department of Mathematics, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China

**Abstract** In recent years, high-accurate and high-resolution weighted essentially non-oscillatory (WENO) schemes for hyperbolic conservation laws have been developed in computational fluid dynamics. The basic idea of WENO is to obtain a higher approximation by a linear combination of low order numerical fluxes. In this paper, we will introduce general approaches of finite difference and finite volume upwind WENO, central WENO, compact central WENO and optimize WENO schemes, and discuss strategies of handling negative linear weights and how to solve multi-dimensional problems. In the last part of this paper, we present some numerical examples to demonstrate the accuracy and high-resolution properties of these schemes.

**Keywords** finite difference method, finite volume method, weighted essentially non-oscillatory method, hyperbolic conservation laws.

---

\* The project supported by the National Natural Science Foundation of China (10071083, 10028103) and the Innovation Fund of State Key Laboratory of Fire Science (SKLFS), USTC.