第16卷第2期　　厦门水产学院学报　　Vol. 16 №2
1994年12月　JOURNAL OF XIAMEN FISHERIES COLLEGE　Dec. 1994

二阶大时间步长的广义EO格式的收敛性

邱建贤

(厦门水产学院 基础部，厦门 361021)

摘要：本文构造了一类计算双曲守恒律弱解的二阶精度的 2N+3 点显式格式，这类格式在 CFL 条件 N 的限制下为 TVD 格式，这类格式是用改变一阶精度的 2N+1 点格式的通量得到的，并证明了这类格式的收敛性。

关键词：守恒律，TVD，通量，收敛性

引言

本文研究用大时间步长差分格式求解一维单个守恒律初值问题：

$$(1.1)\quad \begin{cases} \partial u/\partial t+\partial f(u)/\partial x=0 & t>0 \\ u(x,0)=uo(x) & -\infty<x<+\infty \end{cases} \qquad f\in C^2(R)$$

众所周知，若 $f''\neq 0$，那么即使初值 $u_0(x)$ 是 x 的相当光滑的函数，(1.1) 的解也会产生间断，即产生激波。因此必须拓广古典解的概念，引入弱解的定义：

定义 1.1：对于任意的 $\varphi\in C^\infty(R\times[0,+\infty];R)$，若函数 u (x，t) 满足关系式：

$$\iint_{t\geqslant 0}[u\partial\varphi/\partial t+f(u)\partial\varphi/\partial x]\,dxdt+\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,0)\,uo(x)\,dx=0$$

则称 u (x，t) 为初值问题 (1.1) 的弱解。然而，弱解并不唯一，因此必须从中选出唯一满足物理意义的解——物理解，或称熵解，如果 (1.1) 的弱解 u (x，t) 满足不等式 (1.2)，则 u (x，t) 为 (1.1) 的熵解。

$$(1.2)\qquad -\iint_{t\geqslant 0}[\eta(u)\partial\varphi/\partial t+F(u)\partial\varphi/\partial x]\,dxdt\leqslant 0$$

其中 η 是 u 的凸函数，F 是 u 的边续可微函数，且满足 $F'=\eta' f'$. 1983 年，Harten[2] 首创了二阶的 TVD (Total Variation Diminishing) 格式。这类格式计算激波时，具有激波过渡区窄且平稳等优美性质。构造大时间步长格式的方法是 Leveque 在 1982 年[8]首先提出的，他构造了大时间步长的广义 Godunov 格式。1984 年，Brenier[1]利用平均多值的方法构造了大时间步长的广义 EO 格式 (L－EO)。

本文改进了 L－EO 格式的精度，构造了二阶大时间步长的广义 EO 格式 (SL－EO)，并研究了 SL－EO 格式的基本性质。

收稿日期：1994－09－29

二阶精度的格式

记空间步长为$\triangle x$，时间步长为$\triangle t$，步长比$\lambda=\triangle t/\triangle x$，$x_j=j\triangle x$，$t_n=n\triangle t$，$v(x,$ $)$ 表示（1.1）的近似解，$v_j^n=v(j\triangle x, n\triangle t)$，$f_j^n=f(v_j^n)$，$\triangle v_{j+1/2}^n=v_{j+1}^n-v_j^n$，$f_\xi(v)=$ $(v)-\xi v$.

定义 2.1：如果$\sum_j|\triangle v_{j+1/2}^n|$存在，则定义序列$V^n=\{v_j^n\}$关于 X 的总变差为：

$$TV(V^n)=\sum_j|\triangle v_{j+1/2}^n|$$

定义 2.2：如果差分格式的解满足：$TV(V^{n+1})\leqslant TV(V^n)$，则称此差分格式为 TVD 格式。

1984 年，Y. Brenier[1]利用平均多值方法构造了 L－EO 格式：

(2.1a)　$$v_j^{n+1}=v_j^n-\lambda(H_{j+1/2}^n-H_{j-1/2}^n)$$

(2.1b)　$$H_{j+1/2}^n=h(v_j^{n+1}, v_j^n, 0)+\sum_{i=1}^{N-1}\{h(v_{j+i+1}^n, v_{j+i}^n, -i/\lambda)-f(v_{j+i}^n)-iv_{j+i}^n/\lambda+h(v_{j-i+1}^n, v_{j-i}^n, i/\lambda)-f(v_{j-i+1}^n)+iv_{j-i+1}^n/\lambda\}$$

其中：　$$h(v_{j+1}^n, v_j^n, \xi)=(f_\xi(v_{j+1}^n)+f_\xi(v_j^n))/2-Q(\upsilon_{j+1/2}^n-\lambda\xi)\triangle v_{j+1/2}^n/(2\lambda)$$

$$v_{j+1/2}^n=\begin{cases}\lambda(f_{j+1}^n-f_j^n)/\triangle v_{j+1/2}^n, & \triangle v_{j+1/2}^n\neq 0\\ \lambda f'(v_j^n) & \triangle v_{j+1/2}^n=0\end{cases}$$

$$Q(\upsilon_{j+1/2}^n-\lambda\xi)=\begin{cases}\lambda\int_{v_j^n}^{v_{j+1}^n}|f'(w)-\xi|dw/\triangle v_{j+1/2}^n & \triangle v_{j+1/2}^n\neq 0\\ \lambda f'(v_j^n) & \triangle v_{j+1/2}^n=0\end{cases}$$

L－EO 格式在 CFL 条件（2.2）的限制下为单调格式。

(2.2)　$$\lambda SUP|f'(u)|\leqslant N$$

单调格式是 TVD 格式[2]，而且只能是一阶精度的格式[4]，利用［4］的方法，容易验证差分格式（2.1）对初值问题（1.1）的截断误差为$R(u,\lambda)$：

$$R(u,\lambda)=\triangle x\left(\frac{\partial}{\partial x}(\sigma(u,\lambda)/\lambda\partial u/\partial x)\right)+0(\triangle x^2)$$

其中：$$\sigma(u,\lambda)=\sigma(\upsilon)=\left(\sum_{i=-N+1}^{N-1}|\upsilon+i|-N(N-1)-\upsilon^2\right)/2$$

$$\upsilon=\lambda f'(u)$$

类似于 Harten[2]及 Vila[9]的做法，我们将 L－EO 格式应用于解初值问题：

(2.3)　$$\begin{cases}\partial u/\partial x+\partial(f+g/\lambda)/\partial x=0 & t>0\\ u(x,0)=u_0(x) & -\infty<x<+\infty\end{cases}$$

其中：$g=\triangle x\sigma(\upsilon)\partial u/\partial x$，得到差分格式：

(2.4a)　$$v_{j+1}^n=v_j^n-\lambda(\overline{H}_{j+1/2}^n-\overline{H}_{j-1/2}^n)$$

(2.4b)　$$\overline{H}_{j+1/2}^n=(f_{j+1}^n+f_j^n+(g_{j+1}^n+g_j^n)/\lambda)/2-Q(\upsilon_{j+1/2}^n+\gamma_{j+i+1/2}^n)\triangle v_{j+1/2}^n/(2\lambda)+$$

$$\sum_{i=1}^{-1}\{((f^n_{j+i+1}-f^n_{j+i}+(g^n_{j+i+1}-g^n_{j+i})/\lambda)/2-(Q(\upsilon^n_{j+i+1/2}+\gamma^n_{j+i+1/2}+i)-i)\triangle v^n_{j+i+1/2}/(2\lambda)$$

$$-(f^n_{j-i}-f^n_{j-i+1}+(g^n_{j-i}-g^n_{j-i+1})/\lambda)/2-(Q(\upsilon^n_{j-i+1/2}+\gamma^n_{j-i+1/2}-i)-i)\triangle v^n_{j-i+1/2}/(2\lambda)\}$$

(2.4c) $g^n_j=s^n_{j+1/2}\max\ \{0,\ \min\ (\sigma^n_{j+1/2}|\triangle v^n_{j+1/2}|,\ s^n_{j+1/2}\sigma^n_{j-1/2}\triangle v^n_{j-1/2},\ C\triangle x^{\alpha})\}$

(2.4d) $$\gamma^n_{j+1/2}=\begin{cases}(g^n_{j+1}-g^n_j)\ /\triangle v^n_{j+1/2} & \triangle v^n_{j+1/2}\neq 0\\ 0 & \triangle v^n_{j+1/2}=0\end{cases}$$

(2.4e) $s^n_{j+1/2}=\mathrm{sgn}\ (\triangle v^n_{j+1/2})$

(2.4f) $\sigma^n_{j+1/2}=\sigma\ (\upsilon^n_{j+1/2})$

其中：C，α 为正常数，且 $\alpha<1$.

定理 2.1：由（2.4）所定义的差分格式（SL－EO），在初值问题（1.1）解的光滑区（除（x，t）的驻点外）是（1.1）二阶逼近格式。

证明：设初值问题（1.1）的精确解 u（x，t）连续可微，则：

Ⅰ） $(g^n_{j+1}+g^n_j)\ /2=\triangle x\sigma\ (\upsilon)\ \partial u/\partial x|^n_{j+1/2}+o\ (\triangle x^2)$

Ⅱ） $\gamma^n_{j+1/2}\triangle u^n_{j+1/2}=g^n_{j+1}-g^n_j=o\ (\triangle x^2)$

Ⅲ） $|\gamma^n_{j+1/2}|\leqslant\sigma\ (\upsilon^n_{j+1/2})$

由 Q（X）的 Lipschitz 连续性可知：

$|\ [Q\ (\upsilon^n_{j+1/2}+\gamma^n_{j+1/2}+i)\ -Q\ (\upsilon^n_{j+1/2}+i)]\ \triangle u^n_{j+1/2}|\leqslant K|\gamma^n_{j+1/2}\triangle u^n_{j+1/2}|=0\ (\triangle x^2)$

因此，利用 Taylor 公式得：

$$\lambda\overline{H}^n_{j+1/2}=\ \{\lambda f-\triangle x\upsilon^2\ (\partial u/\partial x)\ /2\}^n_{j+1/2}+0\ (\triangle x^2)^n_{j+1/2}$$

记 $0(\triangle x^2)^n_{j+1/2}=\triangle x^2\beta^n_{j+1/2}+0(\triangle x^3)$，由于 g 除在 $\partial u/\partial x=0$ 处不可微外，处处可微，所以 $\beta^n_{j+1/2}$除在 $\partial u/\partial x=0$ 外是 Lipschitz 连续的，即 $|\beta^n_{j+1/2}-\beta^n_{j-1/2}|=0\ (\triangle x)$，

此时
$$\begin{aligned}&u^n_j-\lambda\ (\overline{H}^n_{j+1/2}-\overline{H}^n_{j-1/2})\\&=u^n_j+\triangle t\partial u/\partial t|^n_j+\triangle t^2\partial^2u/\partial t^2/2|^n_j+0\ (\triangle x^3)\\&=u^{n+1}_j+0\ (\triangle x^3)\end{aligned}$$

所以 $(u^n_{j+1}-u^n_j)\ /\triangle t+\ (\overline{H}^n_{j+1/2}-\overline{H}^n_{j-1/2})/\triangle x=0\ (\triangle x^2)$，即 SL－EO 格式除 u（x，t）的驻点外是（1.1）的二阶逼近格式。

定理 1.2：SL－EO 格式在 CFL 条件（2.2）的限制下为 TVD 格式。

证明：根据 σ（υ）的定义，容易证明

$$\sup_{|\upsilon|\leqslant N}\ (|\upsilon|+\sigma\ (\upsilon))\ \leqslant N$$

比较 SL－EO 格式与 L－EO 格式的数值通量函数可知，当 $\mathrm{SUP}_j|\upsilon^n_{j+1/2}+\gamma^n_{j+1/2}|\leqslant N$ 时，SL－EO 格式为 TVD 格式，由于 $|\gamma^n_{j+1/2}|\leqslant\sigma\ (\upsilon^n_{j+1/2})$，所以在 CFL 条件（2.2）的限制下有：$\mathrm{SUP}_j|\upsilon^n_{j+1/2}+\gamma^n_{j+1/2}|\leqslant\mathrm{SUP}_j|\upsilon^n_{j+1/2}+\sigma\ (\upsilon^n_{j+1/2})\ |$

$$\leqslant\sup_{|\upsilon|\leqslant N}\ (|\upsilon|+\sigma\ (\upsilon))\ \leqslant N$$

所以，SL－EO 格式在 CFL 条件（2.2）的限制下为 TVD 格式。

差分格式的收敛性

在这一节里，我们研究 SL－EO 格式的收敛性。对于给定的$\triangle x$，$\triangle t$，设由 SL－EO 各式计算的解为 $\{v_j^n\}$，定义初值问题（1.1）的近似解 $v^{\triangle x}(x,t)$ 为：

3.1a) $v^{\triangle x}(x,t)=v_j^n \qquad (x,t)\in(x_{j-1/2},x_{j+1/2}]\times[t_{n-1},t_n)$

3.1b) $v^{\triangle x}(x,0)=u_0(x_j) \qquad x\in(x_{j-1/2},x_{j+1/2}]$

引理 3.1：设初值问题（1.1）的初值 $u_0(x)\in BV_{loc}(R)$，且为周期函数，或 $\|u_0(x)\|_1<+\infty$. 那么，当步长比 λ 满足 CFL 条件（2.2）时，由 SL－EO 格式所计算的初值问题（1.1）的近似解族 $\{v^{\triangle x}(x,t)\}$ 在 $L^\infty(R)$ 中关于 t，$\triangle x$ 一致有界。

E理 3.1：设 $u_0(x)$ 满足引理 3.1 的条件，那么，当步长比 λ 满足 CFL 条件（2.2）时，由 SL－EO 格式所计算的初值问题（1.1）的近似解族 $\{v^{\triangle x}(x,t)\}$，当$\triangle x\to 0$ 时，在 $G=Lloc(R\times[0,T];R)$ 内收敛，且其极限为（1.1）满足熵条件的唯一弱解。

证明：由定理 2.2 及引理 3.1 知，$\{v^{\triangle x}(x,t)\}$ 是总变差及 L^∞范数一致有界的。因比根据 Lax－Wendroff 定理 [7] 及 Glimm 定理 [5] 知：$\{v^{\triangle x}(x,t)\}$ 中任一序列都存E着一个在 G 内收敛的子序列，其极限 $u(x,t)$ 是（1.1）的一个弱解，为方便，仍记攵敛的子序列为 $\{v^{\triangle x}(x,t)\}$

由于 L－EO 格式是单调格式，而单调格式是满足熵条件的格式 [4]。因此对每对熵函数 η 和熵通量 F^* 都存在着某个数值熵通量函数 F（2N 个变量的函数）满足：

3.2) $\eta(\bar{v}_j^n-\eta(v_j^n)+\lambda\triangle F_{j+1/2}^n\leqslant 0$

其中 $\bar{v}_j^n=v_j^n-\lambda(H_{j+1/2}^n-H_{j-1/2}^n)$

定义 $F^{\triangle x}(x,t)$：$F^{\triangle x}(x,t)=F_{j+1/2}^n \qquad (x,t)\in(x_{j-1/2},x_{j+1/2}]\times[t_{n-1},t_n)$

对于非负试验函数 $\varphi\in C_0^\infty(R\times R^+)$，定义：

$$\varphi_t^{\triangle x}(x,t)=(\varphi_j^{n+1}-\varphi_j^n)/\triangle t \qquad (x,t)\in(x_{j-1/2},x_{j+1/2})\times(t_n,t_{n+1}]$$

$$\varphi_x^{\triangle x}(x,t)=(\varphi_{j+1}^n-\varphi_j^n)/\triangle x \qquad (x,t)\in(x_j,x_{j+1})\times(t_n,t_{n+1}]$$

记 $v_j^{n+1}=v_j^n-\lambda(\overline{H}_{j+1/2}^n-\overline{H}_{j-1/2}^n)=\bar{v}_j^n-\triangle a_{j+1/2}^n$

其中 $a_{j+1/2}^n=\lambda(H_{j+1/2}^n-H_{j+1/2}^n)$

用$\triangle x\varphi_j^n$ 乘以（3.2），并对 n，j 求和得：

3.3) $$\sum_{n,j}x\left(\eta(\bar{v}_j^n)-\eta(v_j^n)+\lambda\triangle F_{j+1/2}^n\right)\varphi_j^n\leqslant 0$$

因此，

3.4) $$\sum_{n,j}x\left(\eta(v_{j+1}^n)-\eta(v_j^n)+\lambda\triangle F_{j+1/2}^n\right)\varphi_j^n$$

$$\leqslant\sum_{n,j}x\left(\eta(v_j^{n+1})-\eta(\bar{v}_j^n)\right)\varphi_j^n$$

由于 φ 具有紧支集，因此（3.4）的左边可以改写为以下形式：

$$LM=-\sum_{n,j}\triangle x\triangle t\eta(v_{j+1}^{n})(\varphi_j^{n+1}-\varphi_j^{n})/\triangle t+F_{j-1/2}^{n}(\varphi_{j+1}^{n}-\varphi_j^{n})/\triangle x$$

$$=-\iint_{t\geqslant 0}[\eta(v^{\triangle x}(x,t))\varphi_t^{\triangle x}(x,t)+F^{\triangle x}(x,t)\varphi_x^{\triangle x}(x,t)]dxdt$$

由 Lebesque 控制收敛定理及 $F^{\triangle x}$ 的性质知：当 $\triangle x\to 0$ 时，LM 收敛于

$$-\iint_{t\geqslant 0}[\eta(u(x,t))\varphi_t(x,t)+F^{*}(x,t)\varphi_x(x,t)]dxdt$$

因此，要证明 SL－EO 格式满足熵条件，仅要证明（3.4）的右边 RM 满足 $\lim\limits_{\triangle x\to 0}RM\leqslant 0$。由于 η 是凸函数（不妨设 η 是可微的），则：

$$\eta(x)-\eta(y)=\eta'(x)(x-y)-\eta''(\xi)(x-y)2/2\leqslant\eta'(x)(x-y)$$

因而

$$RM\leqslant\sum_{n,j}\triangle x\eta'(x_{j+1}^{n})(v_{j+1}^{n}-\bar{v}_j^{n}))\varphi_j^{n}\equiv RM1 \tag{3.5}$$

由于 $a_{j+1/2}^{n}=\lambda(\overline{H}_{j+1/2}^{n}-H_{j+1/2}^{n})$

$$=(g_{j+N}^{n}+g_{j-N+1}^{n})/2-\sum_{i=-N+1}^{N-1}[Q(\upsilon_{j+1/2}^{n}+\gamma_{j+1/2}^{n}+i)-Q(\upsilon_{j+1/2}^{n}+i)]\triangle u_{j+1/2}^{n}/2$$

根据 g_j^n 的定义知：

$$|g_j^n|\leqslant c\triangle x^{\alpha}$$

$$|Q(\upsilon_{j+i+1/2}^{n}+\gamma_{j+i+1/2}^{n}+i)-Q(\upsilon_{j+i+1/2}^{n}+i)]\triangle u_{j+i+1/2}^{n}|$$

$$\leqslant K|g_{j+i+1}^{n}-g_{j+i}^{n}|\leqslant 2KC\triangle x^{\alpha}$$

所以，

$$|a_{j+1/2}^{n}|\leqslant[C+2(N-1)KC]\triangle x^{\alpha}\equiv e(\triangle x)$$

$$RM1=\sum_{n,j}\triangle x\varphi_j^{n}(\eta'(v_{j+1}^{n})\triangle a_{j+1/2}^{n})$$

$$=-\sum_{n,j}\triangle x\varphi_{j+1}^{n}a_{j+1/2}^{n})\triangle\eta'(v_{j+1}^{n})-\sum_{n,j}\triangle x\eta'(v_j^{n+1})a_{j+1/2}^{n}\triangle\varphi_j^{n}$$

$$=RM2+RM3$$

由于 φ 具有紧支集，所以存在常数 $T>0$，使得当 $t\geqslant T$ 时，$\varphi(x,t)\equiv 0$.

$$|\triangle\eta'(v_{j+1}^{n})|\leqslant\|\eta''(v^{\triangle x}(x,t))\|_{\infty}|v_{j+1}^{n+1}-v_{j+1}^{n}|$$

由于 $v^{\triangle x}(x,t)$ 是中的有界函数，故 $\|\eta''(v^{\triangle x}(x,t))\|_{\infty}$ 有界。因此，存在常数 K1 使得 $|\triangle\eta'(v_j^{n+1})|\leqslant k1|\triangle V_{j+1/2}^{n+1}|$ 因而，

$$|RM2|\leqslant K1e(\triangle x)\sum_{n,j}\triangle x\varphi_j^{n}|\triangle v_{j+1/2}^{n+1})$$

$$\leqslant K1e(\triangle x)\|\varphi\|_{\infty}\sum_{n\triangle t\leqslant T}TV(V^{n+1})/\lambda$$

$$\leqslant TK1e(\triangle x)\|\varphi\|_{\infty}TV(u_0(x))/\lambda$$

$$|RM3|\leqslant e(\triangle x)\sum_{n,j}\triangle x\triangle t\eta''(v_{j+1}^{n})|\triangle\varphi_j^{n}|/\lambda$$

$$=e(\triangle x)\iint_{t\geqslant 0}\eta''(v^{\triangle x}(x,t))|\varphi_x^{\triangle x}(x,t)|dxdt/\lambda$$

由 Lebesque 控制收敛定理知：存在一常数 A 使得：

$$\iint_{t\geqslant 0}\eta''\left(v^{\triangle x}(x,t)\right)\left|\varphi_x^{\triangle x}(x,t)\right|dxdt\leqslant A$$

故　　$|RM3|\leqslant Ae(\triangle x)/\lambda$

由于 λ 是固定的，T，$\|\varphi\|_\infty$，$TV(u_0(x))$，K1，A 都是常数，因此 $\lim\limits_{\triangle x\to 0}RM1=0$

即　　$\lim\limits_{\triangle x\to 0}RM\leqslant 0$

所以 SL－EO 格式满足熵条件，即 u（x，t）是（1.1）满足熵条件的唯一弱解。

4　数值例子

本节给出用不同的时间步长的 SL－EO 格式计算的数值例子。考虑单个守恒律初值问题：

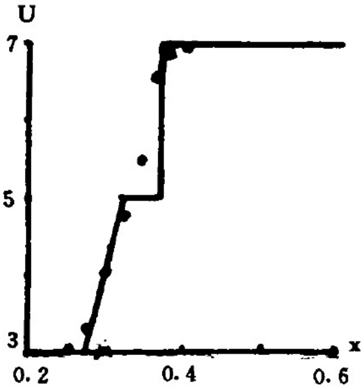
$$\begin{cases}\partial u/\partial t+\partial\left(-u2/2\right)/\partial x=0\\ u(x,0)=u_0(x)\end{cases}$$

其中：

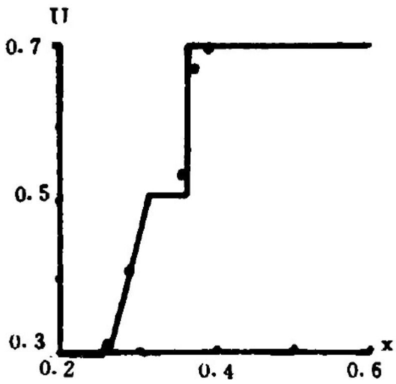
$$u_0(x)=\begin{cases}0.3 & x<0.6\\ x-0.3 & 0.6\leqslant x<0.8\\ 0.5 & 0.8\leqslant x<0.96\\ 0.7 & x\geqslant 0.96\end{cases}$$

取空间步长△x＝0.02，时间步长△t＝1.25N△x，利用不同的 N 的 SL－EO 格式，计算同一时间层 t＝1.0 时的数值解，计算结果如图所示。图中 n 表示所需计算时间层层数，“.”表示数值解，实线表示精确解。

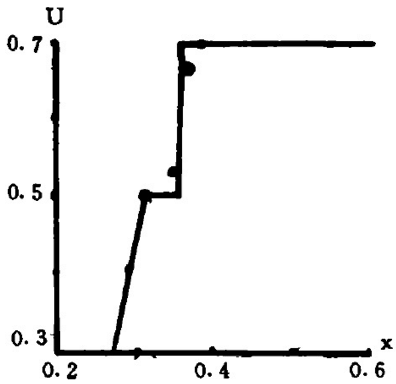
从计算结果可以看出，大时间步长格式对不同的时间步长的计算结果是令人满意的，且随着时间步长的增大，计算结果越理想。



图a　N＝1，n＝40



图b　N＝2，n＝2



图c　N＝20，n＝2

参 考 文 献

Y. Brenier. Averaged multivalued solutions for scalar conservation laws. SIAM. J. Numer. Anal, 1984 (21): 1013—1037

A. Harten. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. J. Comp. Phys. 1983 (49): 357—393

A. Harten. On a class of high resolution total—variation—stable finite—difference schemes. SIAM. Numer. Anal. 1984 (21): 1—23

A. Harten, J. M. Hyman, P. D. Lax. On finite—difference approximations and entropy conditions for shocks. Comm. Pure. Appl. Math. 1976 (29): 297—322

J. Glimm. Solution in the large for nonliear hyperbolic systems of equations. Comm. Pure. Appl. Math. 1965 (18): 697—715

P. D. Lax. Shock waves and entropy. 《Contribution to nonlinear functional analysis》 Academic Press. New York. P603—634

P. D. Lax & B. Wendroff. Systems of conservation laws. Comm. Pure. Appl. Math. 1960 (13): 217—237

R. J. Leveque. Large time—step capturing techniques for scalar conservation laws. SIAM. Numer. Anal. 1982 (18): 1091—1109

J. P. Vila. High order schemes and entropy condition for nonliear hyperbolic systems of conservation laws. Rapport. Interne. No: 111 CMAP

0 邱建贤. 大时间步长的广义逆风格式。厦门水产学院学报，1992，14 (1): 66—79

Convergence of Second—Order Large Time Step EO Scheme

Qiu Jianxian

(Dept. of Basic Courses, Xiamen Fisheries College, Xiamen 361021)

Abstract: In this paper, we present a class of new second—order accurate (2N+3) —point explicit schemes for the computation of weak solutions of hyperbolic conservation laws, these schemes are diminishing in total variation under the CFL restriction of N. These schemes are obtained by applying first—order accurate (2N+1) —point schemes to modified fluxes. We prove that these schemes are convergent.

Key words: conservation laws, TVD, flux, convergence