第17卷第1期 厦门水产学院学报 Vol. 17 No 1
1995年6月 JOURNAL OF XIAMEN FISHERIES COLLEGE Jun. 1995

一类大时间步长的 TVD 格式

邱建贤

（厦门水产学院基础部，厦门 361021）

摘要：本文构造了一类计算双曲守恒律弱解的（2N+1）点一阶显式差分格式，并证明了这类格式在拟 CFL 条件 N 的限制下为 TVD 格式。

关键词：守恒律，TVD，通量，差分格式

1 引言

本文研究用大时间步长差分格式求解一维单个守恒律初值问题：

$$
(1.1)\qquad \begin{cases} \partial u/\partial t+\partial f(u)/\partial x=0 & t>0 \\ u(x,0)=u_0(x) & -\infty<x<+\infty \end{cases} \qquad f\in C^2(R)
$$

1983 年，Harten[3]首创了 TVD（Total Variation Diminishing）差分格式，这类格式在计算激波时，具有激波过渡区窄且平稳等优美性质。构造大时间步长格式的方法是 Leveque 在 1982 年[5]首先提出的，他构造了大时间步长的广义 Godunov 格式。1984 年，Brenier[1]利用平均多值的方法构造了大时间步长的广义 EO（Engquist－Osher）格式（L－EO）。

本文在［1］的基础上构造了一类更为一般 2N+1 点的显式一阶大时间步长格式（L－GEN），进而证明了这类格式在拟 CFL 条件 N 的限制下为 TVD 格式。

2 一阶大时间步长格式（L－GEN）

记空间步长为$\triangle x$，时间步长为$\triangle t$，步长比 $\lambda=\triangle t/\triangle x$，$x_j=j\triangle x$，$t_n=n\triangle t$，$V(x,t)$ 表示（1.1）的近似解，$V_j^n=V(j\triangle x, n\triangle t)$，$f_j^n=f(V_j^n)$，$\triangle v_{j+1/2}^n=V_{j+1}^n-V_j^n$，$f_\zeta(V)=f(V)-\zeta V$。

定义 2.1：如果 $\sum_j|\triangle V_{j+1/2}^n|$ 存在，则定义序列 $V^n=\{V_j^n\}$ 关于 X 的总变差为：

$$TV(V^n)=\sum_j|\triangle V_{j+1/2}^n|$$

定义 2.2：如果差分格式的解满足：$TV(V^{n+1})\leqslant TV(V^n)$，则称此差分格式为 TVD

收稿日期：1994－11－08

格式。

1984 年，Y. Brenier[1]利用平均多值方法构造了 L—EO 格式：

(2.1a)　$V_j^{n+1}=V_j^n-\lambda\left(H_{j+1/2}^n-H_{j-1/2}^n\right)$

(2.1b)　$H_{j+1/2}^n=h^{EO}\left(V_{j+1}^n, V_j^n, 0\right)+\sum_{i=1}^{n-1}\{h^{EO}\left(V_{j+i+1}^n, V_{j+i}^n, -i/\lambda\right)-f\left(V_{j+i}^n\right)$

$-iV_{j+i}^n/\lambda+h^{EO}\left(V_{j-i+1}^n, V_{j-i}^n, i/\lambda\right)-f\left(V_{j-i+1}^n\right)+iV_{j-i+1}^n/\lambda\}$

其中：$h^{EO}\left(V_{j+1}^n, V_j^n, \xi\right)=\left(f_\xi\left(V_{j+1}^n\right)+f_\xi\left(V_j^n\right)\right)/2-Q\left(\upsilon_{j+1/2}^n-\lambda\xi\right)\triangle V_{j+1/2}^n/(2\lambda)$

$$\upsilon_{j+1/2}^n=\begin{cases}\lambda\left(f_{j+1}^n-f_j^n\right)/\triangle V_{j+1/2}^n, & \triangle V_{j+1/2}^n\neq 0\\ \lambda f'\left(V_j^n\right), & \triangle V_{j+1/2}^n=0\end{cases}$$

$$Q\left(\upsilon_{j+1/2}^n-\lambda\xi\right)=\begin{cases}\lambda\int_{V_j^n}^{V_{j+1}^n}\left|f'(w)-\xi\right|dw/\triangle V_{j+1/2}^n & \triangle V_{j+1/2}^n\neq 0\\ \lambda f'\left(V_j^n\right) & \triangle V_{j+1/2}^n=0\end{cases}$$

L—EO 格式在 CFL 条件（2.2）的限制下为单调格式[1]

(2.2)　$\lambda SUP\left|f'(u)\right|\leqslant N$

本文构造更为一般的一阶大时间步长显式格式，为此我们将(2.1)的数值通量 $H_{j+1/2}^n$ 中的 $h^{EO}\left(V_{j+1}^n, V_j^n, \xi\right)$ 代之为更为一般的数值通量 $h\left(V_{j+1}^n, V_j^n, \xi\right)$ 得到差分格式 L—GEN：

(2.3a)　$V_j^{n+1}=V_j^n-\lambda\left(G_{j+1/2}^n-G_{j-1/2}^n\right)$

(2.3b)　$G_{j+1/2}^n=h\left(V_{j+1}^n, V_j^n, 0\right)+\sum_{i=1}^{N-1}\{h\left(V_{j+i+1}^n, V_{j+i}^n, -i/\lambda\right)-f\left(V_{j+i}^n\right)$

$-iV_{j+i}^n/\lambda+h\left(V_{j-i+1}^n, V_{j-i}^n, i/\lambda\right)-f\left(V_{j-i+1}^n\right)+iV_{j-i+1}^n/\lambda\}$

(2.3c)　$h(x, x, \xi)=f(x)-\xi x$

(2.3d)　$h(x, y, \xi)=\begin{cases}f(x)-\xi x & \xi\geqslant\xi 1\geqslant\max\limits_I f'(u)\\ f(y)-\xi y & \xi\leqslant\xi 2\leqslant\min\limits_I f'(u)\end{cases}$

(2.3e)　$\operatorname{sgn}(x-y)\frac{d^2}{d\xi^2}h(x, y, \xi)\leqslant 0\qquad \xi 2\leqslant\xi\leqslant\xi 1$

(2.3f)　$\left[h(x, y, \xi)-f_\xi(v)\right]\operatorname{sgn}(x-y)\leqslant 0\qquad V=x, y$

其中：　$I=\left[\min(x, y), \max(x, y)\right]$，$\xi 1$，$\xi 2$ 为满足：$\xi 1\geqslant\max\limits_I f'(u)$，$\xi 2\leqslant\min\limits_I f'(u)$ 的任意常数。

利用 Taylor 展开的方法，容易验证差分格式（2.3）对初值问题（2.1）的截断误差为：

$$R(u, \lambda)=\triangle x\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\sigma(u, \lambda)/\lambda\partial u/\partial x\right)\right)+0\left(\triangle x^2\right)$$

其中：　$\sigma(u, \lambda)=\sigma(\upsilon)=\left(\sum_{i=-N+1}^{N-1}Q(\upsilon, i)-N(N-1)-\upsilon^2\right)/2$

$\upsilon=\lambda f'(u)$

$Q(\upsilon, i)=\lambda\lim\limits_{x,y\to u}\left[f_{-i/\lambda}(x)+f_{-i/\lambda}(y)-2h(x, y, -i/\lambda)\right]/(x-y)$

定理 2.1：L—GEN 格式（2.3）在（2.4）的限制下为（1.1）的一阶精度逼近。

(2.4)　$-N\leqslant\lambda\xi 2\leqslant\lambda\xi 1\leqslant N$

证明：要证明L—GEN格式（2.3）在（2.4）的限制下为（1.1）的一阶精度逼近，只需证明$\sigma(\upsilon)$不恒为零即可，根据$Q(\upsilon,i)$的定义及条件（2.3c）——（2.3f），可知：在条件（2.4）的限制下有：

$$|\upsilon+i|\leqslant Q(\upsilon,i)\leqslant N \qquad i=-N+1,\cdots\cdots,N-1$$

因此：$\sigma(\upsilon)\geqslant(\sum_{i=-N+1}^{N-1}|\upsilon+i|-N(N-1)-\upsilon^2)/2=\sigma_1(\upsilon)$

设$\upsilon=K+\varepsilon$，　$0\leqslant\varepsilon<1$，　$-N\leqslant K\leqslant N$，　K为整数。

$$\begin{aligned}\sigma_1(\upsilon)&=(\sum_{i=-N+1}^{-K-1}(-\upsilon-i)+\sum_{i=K}^{N-1}(\upsilon+i)-N(N-1)-\upsilon^2)/2\\&=(2K+1)\upsilon/2-K/2-K^2/2-\upsilon^2/2\\&=[(2K+1)(K+\varepsilon)-K-K2-(K+\varepsilon)2]/2\\&=\varepsilon(1-\varepsilon)/2\geqslant0\end{aligned}$$

且当且仅当υ为整数时$\sigma_1(\upsilon)=0$。

因而，若υ非整数，则$\sigma(\upsilon)\geqslant\sigma_1(\upsilon)>0$，即L—GEN格式（2.3）是（1.1）的一阶逼近格式。

3 L—GEN格式的TVD性质

本节我们研究L—GEN格式的基本性质，为此，我们首先引进引理：

引理2.1[6]：如果2N+1点守恒型格式

$$(3.1)\qquad v_j^{n+1}=v_j^{n}-\sum_{i=0}^{N-1}\{C^i_{j+i+1/2}\triangle v^n_{j+i+1/2}-D^i_{j-i-1/2}\triangle V^n_{j-i-1/2}\}$$

有下列条件成立，则此格式为TVD格式。

Ⅰ）　$0\leqslant C^{N-1}_{j+1/2}\leqslant\cdots\cdots\leqslant C^0_{j+1/2}$

Ⅱ）　$0\leqslant D^{N-1}_{j+1/2}\leqslant\cdots\cdots\leqslant D^0_{j+1/2}$

Ⅲ）　$0\leqslant1-C^0_{j+1/2}-D^0_{j+1/2}$

定理2.1：由（2.3）式定义的L—GEN格式在拟CFL条件（2.4）限制下为TVD格式。

证明：将（2.3）改写为（3.1）的形式得：

$$(3.2)\qquad V_j^{n+1}=V_j^n+C^{N-1}_{j+N-1/2}\triangle V^n_{j+N-1/2}+\sum_{i=0}^{N-2}\{(C^i_{j+i+1/2}-C^{i+1}_{j+i+1/2})\triangle V^n_{j+i+1/2}-(D^i_{j-i-1/2}-D^{i+1}_{j-i-1/2})\triangle V^n_{j-i-1/2}\}+D^{N-1}_{j-N+1/2}\triangle V^n_{j-N+1/2}$$

其中：　$C^i_{j+1/2}=-\lambda[h(V^n_{j+1},V^n_j,-i/\lambda)-f(V^n_j)-iV^n_j/\lambda]/\triangle V^n_{j+1/2}$

$D^i_{j+1/2}=-\lambda[h(V^n_{j+1},V^n_j,i/\lambda)-f(V^n_{j+1})-iV^n_{j+1}/\lambda]/\triangle V^n_{j+1/2}$

由函数$h(x,y,\xi)$的性质及（2.4）知：　$C^N_{j+1/2}=D^N_{j+1/2}=0$

由（2.3f）知：　$C^{N-1}_{j+1/2}\geqslant0$　　$D^{N-1}_{i+1/2}\geqslant0$

由（2.3e）知：　对于任意的ξ，η都有：

$$\mathrm{sgn}(x-y)(h(x,y,\xi+\eta)-2h(x,y,\xi)+h(x,y,\xi-\eta))\leqslant0$$

因此有：Ⅰ） $C^{i+1}_{j+1/2}-2C^{i}_{j+1/2}+C^{i-1}_{j+1/2}=-\lambda\,[h(V^n_{j+1},V^n_j,-(i+1)/\lambda)-2h(V^n_{j+1},V^n_j,-i/\lambda)+h(V^n_{j+1},V^n_j,-(i-1)/\lambda)]/\triangle V^n_{j+1/2}\geqslant 0$ $i=1,2\cdots\cdots,N-1$

同样有：Ⅱ） $D^{i+1}_{j+1/2}-2D^{i}_{j+1/2}+D^{i-1}_{j+1/2}\geqslant 0$ $i=1,2,\cdots\cdots N-1$

Ⅲ） $1-(C^0_{j+1/2}-C^1_{j+1/2})-(D^0_{j+1/2}-D^1_{j+1/2})$

$=-\lambda\,[h(V^n_{j+1},V^n_j,-1/\lambda)-2h(V^n_{j+1},V^n_j,0)+h(V^n_{j+1},V^n_j,1/\lambda)]/\triangle V^n_{j+1/2}\geqslant 0$

即（3.2）满足引理3.1的条件，所以格式L－GEN在（2.4）的限制下为TVD格式。

推论3.1：定理3.1中，如果 $\xi 1=\max_I f'(u)$，$\xi 2=\min_I f'(u)$

则L－GEN格式（2.3）在CFL条件（2.2）限制下为TVD差分格式。

对应于通量 $f_\xi(V)$，Godunov格式和EO格式的数值通量分别为：

$$h^G(x,y,\xi)=\mathrm{sgn}(x-y)\min_I \mathrm{sgn}(x-y)f'(u)$$

$$h^{EO}(x,y,\xi)=[f_\xi(x)+f_\xi(y)-\int_y^x|f'(w)-\xi|dw]/2$$

显然 $h^G(x,y,\xi)$，$h^{EO}(x,y,\xi)$ 都满足（2.3c）——（2.3f）的条件，且 $\xi 1=\max_I f'(u)$，$\xi 2=\min_I f'(u)$，在L－GEN格式中，令 $h(x,y,\xi)$ 分别为 $h^G(x,y,\xi)$，$h^{EO}(x,y,\xi)$，则得到大时间步长Godunov格式（L－G）和大时间步长EO格式（L－EO）。

推论3.2：L－G格式和L－EO格式在CFL条件（2.2）的限制下为TVD格式，

设 $h^{uw}(x,y,\xi)=[f_\xi(x)+f_\xi(y)-Q(\upsilon-\lambda\xi)(x-y)/\lambda]/2$

其中：$\upsilon=\begin{cases}(f(x)-f(y))/(x-y) & x\neq y\\ f'(x) & x=y\end{cases}$

$Q(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{4\varepsilon}+\varepsilon & x<2\varepsilon\quad 0<\varepsilon\leqslant 0.5\\ |x| & |x|\geqslant 2\varepsilon\end{cases}$

为广义逆风差分格式的数值通量，代入L－GEN格式得大时间步长广义逆风格式（L－UW），这时，令 $\xi 1=\max_I f'(u)+2\varepsilon/\lambda$，$\xi 2=\min_I f'(u)-2\varepsilon/\lambda$，则

推论3.3：L－UW格式在CFL条件（2.2）的限制下为TVD格式。[6]

设 $h^{LF}(x,y,\xi)=[f_\xi(x)+f_\xi(y)-Q(\upsilon-\lambda\xi)(x-y)/\lambda]/2$

$Q(x)=\begin{cases}1 & |x|\leqslant 1\\ |x| & |x|\geqslant 1\end{cases}$

为广义Lax－Fridrichs差分格式的数值通量，代入L－GEN格式得大时间步长广义LF格式（L－LF），此时，令 $\xi 1=[f_\xi(x)-f_\xi(y)]/(x-y)+1/\lambda$，$\xi 2=[f_\xi(x)-f_\xi(y)]/(x-y)-1/\lambda$

推论3.4：L－LF格式在CFL条件（2.2）的限制下为TVD格式。

参 考 文 献

Y. Brenier. Averaged multivalued solutions for scalar conservation laws. SIAM. J. Numer. Anal, 1984 (21): 1013—1037

2 Y. Brenier & S. Osher. Approximate Riemann solvers and numerical flux functions. SIAM. J. Numer. Anal. 1986 (23): 259—273

3 A. Harten. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. J. Comp. Phys. 1983 (49): 357—393

4 A. Harten, J. M. Hyman, P. D. Lax. On finite—difference approximations and entropy conditions for shocks. Comm. Pure. Appl. Math. 1976 (29): 297—322

5 R. J. Leveque. Large time—step capturing techniques for scalar conservation laws. SIAM. Numer. Anal. 1982 (18): 1091—1109

6 邱建贤. 大时间步长的广义逆风格式. 厦门水产学院学报, 1992 (1): 66—79

7 邱建贤. 二阶大时间步长的广义 EO 格式的收敛性. 厦门水产学院学报, 1994 (2): 72—78

A Class of Large Time Step TVD Schemes

Qiu Jianxian

(Dept. of Basic Courses, Xiamen Fisheries College, Xiamen 361021)

Abstract: In this paper, we present a class of difference scheme for the computation of weak solutions of hyperbolic conservation laws, the scheme is frist—order (2N+1) —point explicit scheme. We prove the scheme is TVD scheme under a CFL—like restriction of N.

Key words: conservation laws, TVD, flux, difference scheme