集美大学学报 2(4).1—5.1997
Journal of Jimei University

求解常微分方程的GAUSS型格式

邱建贤 尤克义
(集美大学水产学院基础部，厦门 361021)

摘要 利用GAUSS型求积公式构造求解常微分方程的一步高阶差分格式，并证明格式的稳定性和收敛性。

关键词 常微分方程，差分格式，收敛性
中图分类号 O 241.8

1 引言

在生产实际和科学研究中，我们经常遇到的常微分方程中，在很多情况下都不可能给出解的解析表达式，有时候，即使能求出封闭形式的解，也往往因计算量太大而不实用。因此，常微分方程的数值解法就成为求解常微分方程的一种很重要的方法。

我们考虑一阶常微分方程初值问题：

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{1}$$

的数值解。常微分方程初值问题的数值解方法一般分为两大类：一类是一步法，如EULER方法,RUNGE-KUTTA法；另一类是多步法，如ADMAS法等等。

本文利用GAUSS型求积公式，构造了求解常微分方程（1）的一步高阶显式差分格式，并讨论差分格式基本性质。

2 GAUSS型差分格式

为求解常微分方程初值问题（1）在区间$[a,b]$上的近似解，我们将区间$[a,b]$ N等分，并记 $x_n=a+nh$, $n=0,1,\cdots,N$, $h=(b-a)/N$

假设方程（1）的精确解$y(x)$在x_n处的值为$y(x_n)$，其近似值为y_n，$f_n=f(x_n,y_n)$。

对（1）在区间$[x_n,x_{n+1}]$上求积分得

$$y(x_{n+1})=y(x_n)+\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x,y(x))dx$$

我们利用三阶精度的GAUSS求积公式近似计算积分

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x,y(x))dx$$

得 $\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x,y(x))dx \approx \frac{h}{2}(f(x_n+h1,y(x_n+h1))+f(x_n+h2,y(x_n+h2)))\approx$

$\frac{h}{2}(f(x_n+h1,y_n+h1f_n)+f(x_n+h2,y_n+h2f_n)))$

其中 $h1=(1/2-3/6)h$, $h2=(1/2+3/6)h$，于是，我们得到 GAUSS 型差分格式:

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}(f(x_n+h1,y_n+h1f_n)+f(x_n+h2,y_n+h2f_n)) \tag{2}$$

假设 $f(x,y)$ 和 y 具有三阶连续导数，利用 TAYLOR 展开式可知:

$y(x_{n+1})-y(x_n)=h\,y'(x_n)+\frac{h^2}{2}y''(x_n)+O(h^3)$

$f(x_n+h1,y_n+h1f_n)=f(x_n,y_n)+h1\,f'_x[(x_n,y_n)+f'_y(x_n,y_n)f_n]+O(h^2)$

$f(x_n+h2,y_n+h2f_n)=f(x_n,y_n)+h2[f'_x(x_n,y_n)+f'_y(x_n,y_n)f_n]+O(h^2)$

所以 $(y_{n+1}-y_n)/h-(f(x_n+h1,y_n+h1f_n)+f(x_n+h2,y_n+h2f_n))/2=$

$y'(x_n)-f(x_n,y(x_n))+O(h^2)=O(h^2)$

即差分格式(2)逼近方程(1)的截断误差为 $O(h^2)$，所以，我们有:

定理 1 差分格式（2）是二阶精度格式。

下面我们分析差分格式（2）的 A 一稳定性和收敛性。

对于典型方程 $y'=\lambda y$，差分格式（2）可写成:

$y_{n+1}=y_n+\frac{\lambda h}{2}(y_n+\lambda\ h1y_n)+\frac{\lambda h}{2}(y_n+\lambda\ h2y_n)=(1+\lambda\ h+\frac{(\lambda h)^2}{2})y_n$

它的特征值为 $\mu=1+\lambda\ h+\frac{(\lambda h)^2}{2}$，因此差分格式（2）的绝对稳定区域为 $|\mu|=|1+\lambda\ h+\frac{(\lambda h)^2}{2}|<1$。该稳定区域的实部为(-2,0)。

定理 2 若函数 $f(x,y)$ 具有连续的二阶导数，则差分格式（2）为收敛格式。

证明 记 $e_n=y(x_n)-y_n$

$$\tilde{y}_{n+1}=y(x_n)+\frac{h}{2}(f(x_n+h1,y(x_n)+h1f(x_n,y(x_n)))+f(x_n+h2,y(x_n)+h2f(x_n,y(x_n))))$$

由于函数 $f(x,y)$ 具有连续的二阶导数，所以存在 $L>0$，使得对于任意的 $x\in[a,b]$ 都有 $|f(x,y)-f(x,z)|<L|y-z|$ 恒成立。

由于

$|y(x_{n+1})-\tilde{y}_{n+1}|=O(h^3)=T_{n+1}$

$|\tilde{y}_{n+1}-y_{n+1}|=|y(x_n)+\frac{h}{2}(f(x_n+h1,y(x_n)+h1f(x_n,y(x_n))+$

$$f(x_n+h2,y(x_n)+h2f(x_n,y(x_n)))-y_n-\frac{h}{2}(f(x_n+h1,y_n+h1f_n)+$$

$$f(x_n+h2,yx_n+h2f_n))\leqslant|e_n|+h\_2L|e_n|+h1|f(x_n,y(x_n)-f_n|+|e_n|+h2|f(x_n,y(x_n)-f_n|\leqslant$$

$$|e_n|+\frac{h}{2}L(2|e_n|+hL|e_n|)=(1+hL+(hL)^2/2)|e_n|$$

所以

$$|e_{n+1}|=|y(x_{n+1})-y_{n+1}|\leqslant|y(x_{n+1})-\widetilde{y}_{n+1}|+|\widetilde{y}_{n+1}-y_{n+1}|\leqslant(1+hL+\frac{(hL)^2}{2})|e_n|+T_{n+1}\leqslant$$

$$T_{n+1}+(1+hL+\frac{(hL)^2}{2})T_n+\cdots+(1+hL+\frac{(hL)^2}{2})^n T_1+(1+hL+\frac{(hL)^2}{2})^{n+1}|e_0|=$$

$$O(h^3)\sum_{k=0}^{n}(1+hL+\frac{(hL)^2}{2})^k=O(h^3)[(1+hL+\frac{(hL)^2}{2})^{n+1}-1]/(hL+\frac{(hL)^2}{2})=O(h^2)$$

因此，当 $h\to 0$ 时，$e_{n+1}\to 0$ 。

所以差分格式（2）是一个收敛格式。

3　数值例子

下面我们利用 GAUSS 型差分格式(2)求解常微分方程

$$y'=-xy^2\quad y(0)=2 \tag{3}$$

在[0,2]上的解，取步长 h=0.1 。另外，我们利用二阶 RUNGE-KUTTA 法和向前 EULER 法计算（3）的近似解。计算结果如下：

	x=	.00000	.10000	.20000	.30000	.40000	.50000	.60000
Real	y=	2.00000	1.98020	1.92308	1.83486	1.72414	1.60000	1.47059
Guass	y=	2.00000	1.98015	1.92295	1.83466	1.72390	1.59978	1.47042
Euler	y=	2.00000	2.00000	1.96000	1.88317	1.77678	1.65050	1.51429
R-K2	y=	2.00000	1.98000	1.92273	1.83449	1.72391	1.60007	1.47105
	x=	.70000	.80000	.90000	1.00000	1.10000	1.20000	1.30000
Real	y=	1.34228	1.21951	1.10497	1.00000	.90498	.81967	.74349
Guass	y=	1.34219	1.21950	1.10504	1.00013	.90516	.81989	.74373
Euler	y=	1.37671	1.24404	1.12023	1.00728	.90582	.81557	.73575
R-K4	y=	1.34228	1.21951	1.10497	1.00000	.90498	.81967	.74350
R-K2	y=	1.34317	1.22080	1.10658	1.00184	.90696	.82172	.74554
	x=	1.40000	1.50000	1.60000	1.70000	1.80000	1.90000	2.00000
Real	y=	.67568	.61538	.56180	.51414	.47170	.43384	.40000
Guass	y=	.67592	.61564	.56205	.51438	.47193	.43406	.40021
Euler	y=	.66538	.60339	.54878	.50060	.45799	.42024	.38668
R-K2	y=	.67768	.61732	.56363	.51587	.47331	.43534	.40139

从计算结果可以看出，利用 GAUSS 型格式（2）计算的结果比用 RK2 格式和 EULER

格式计算的结果都要好。

下面我们考虑简单的生态学中群体增长模型方程：

$$y'(t)=ay(N-y)$$

这个模型属于定常型问题。当时间 $t\to\infty$ 时，群体数量 $y\to N$ 。为方便起见，我们假设 a=1,N=1 。我们对不同的时间步长，不同的初始值分别利用 GAUSS 型格式（ 2 ）和 RK2 格式， RK4 格式， EULER 格式进行计算，计算到稳定解为止，所需的计算步数如下图所示。 图中 n 表示所需的计算步数， h 表示计算步长，* 表示用 GAUSS 格式计算的结果，+ 表示用 RK4 计算的结果，· 表示用 RK2 计算的结果。

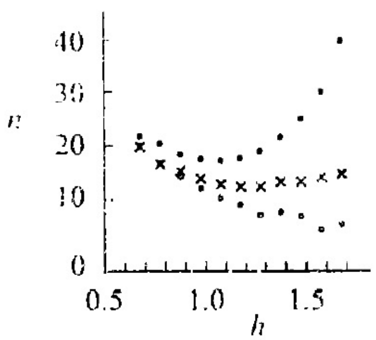

图 1 初始值 y_0 =0.7

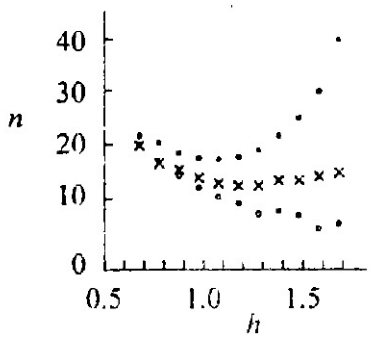

图 2 初始值 y_0 =0.85

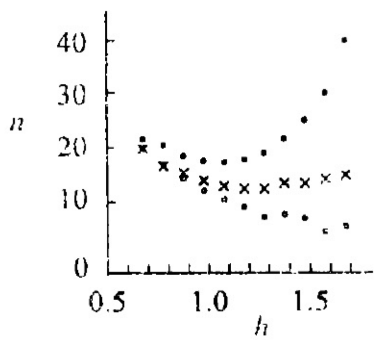

图 3 初始值 y_0 =1.15

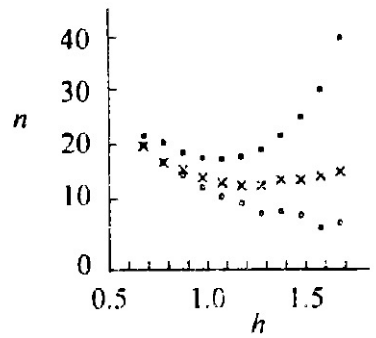

图 4 初始值 y_0 =1.3

从计算结果可以看出，利用 GAUSS 型格式（ 2 ）计算的结果比用 RK2 格式， RK4 格式和EULER格式计算的结果收敛于稳定解的速度都要快的多。因此， GAUSS 格式（ 2 ）是一个很好的格式。

参考文献

1 徐翠薇.计算方法引论.高等教育出版社.北京:1985

2 何旭初.计算数学简明教程.高等教育出版社,北京:1982

GAUSS SCHEME FOR NUMERICAL ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION

Qiu Jianxian　　You Keyi

(*Dept. of Basic Courses, Fisheries Col., Jimei Univ., Xiamen*　361021)

Abstract　In this paper we use Gauss scheme for numerical integral to construct one-step high-order accurate difference schemes for numerical ordinary differential equation, and prove the scheme is stable and convergence.

Key words　Ordinary differential equation, difference scheme, convergence