

一类广义的Lax-Friedrich格式

邱建贤 尤克义

(集美大学水产学院, 厦门 361021)

摘要 构造了一类计算双曲守恒律初值问题弱解的 $2N+1$ 点显式格式, 该格式是Lax-Friedrich格式的推广, 它在CFL条件 N 的限制下为TVD格式。用该格式进行数值试验, 结果令人满意。

关键词 双曲守恒律, TVD, 大时间步长, 差分格式

中图分类号 O 241

1 引言

考虑一维单个守恒律的初值问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 & t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & -\infty < x < +\infty \end{cases} \quad f \in C^2(R) \quad (1.1)$$

众所周知, 若 $f'' \neq 0$, 那么即使初值 $u_0(x)$ 是 x 的相当光滑函数, 1.1式的解也会产生激波。

在初值问题1.1式的数值解问题中, 寻求良好的激波捕捉方法一直是计算数学工作者大力研究的问题。1983年, Harten^[3]首创了二阶的TVD(Total-Variation-Diminishing)格式。这类格式计算激波时, 具有激波过渡区较窄, 且在激波附近不出现振荡现象等良好性质。

构造大时间步长差分格式的方法是Leveque^[5]首先提出的。Brenier^[1]利用平均多值的方法构造了大时间步长广义EO(Engquist-Osher)格式(L-EO)。作者在^[1]的基础上, 构造了大时间步长的广义LE(Lax-Friedrichs)格式(L-LF), 并进行了数值试验, 得到了令人满意的结果。

2 大时间步长的广义LF格式

记空间步长为 Δx , 时间步长为 Δt , 表示1.1式的近似 $U_i = U(j\Delta x, n\Delta t)$, $f_i^n = f(U_i^n)$, $\Delta U_{i+1/2}^n = U_{i+1}^n - U_i^n$, $V^n\{U_i^n\}$, $f_\xi(u) = f(u) - \xi u$ 解, 。

定义2.1 如果 $\sum_i \left| \Delta U_{i+1/2}^n \right|$ 存在, 则定义序列 V^n 关于 x 总变差为:

$$TV(V^n) = \sum_i \left| \Delta U_{i+1/2}^n \right|$$

定义2.2 如果差分格式的解满足:

$$TV(V^{n+1}) \leq TV(V^n)$$

则称此差分格式为TVD格式。

1984年, Y.Brenier^[1]利用平均多值方法构造了L-EO格式:

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \lambda(H_{j+1/2}^{EO} - H_{j-1/2}^{EO}) \tag{2.1a}$$

$$H_{j+1/2}^{EO} = \frac{1}{2}(f_{j+N}^n + f_{j-N+1}^n) - \frac{1}{2} \sum_{k=-N+1}^{N-1} \int_{U_{j+k}^{n+1}}^{U_{j+k}^n} \left(\left| f'(w) - \frac{k}{\lambda} \right| - 1 \frac{k}{\lambda} \right) dw \tag{2.1b}$$

其中步长比 $\lambda = \Delta t / \Delta x$ 。Brenier指出L-EO格式在CFL条件(2.2)限制下为单调格式。

$$\lambda \sup |f'(u)| \leq N \tag{2.2}$$

我们将 $H_{j+1/2}^{EO}$ 改写成为三点差分格式数值通量函数的组合:

$$H_{j+1/2}^{EO} = h^{EO}(U_{j+1}^n, U_j^n, 0) + \sum_{k=1}^{N-1} [h^{EO}(U_{j+k+1}^n, U_{j+k}^n, -k/\lambda) - f_{j+k}^n - \frac{k}{\lambda} U_{j+k}^n] + \sum_{k=1}^{N-1} [h^{EO}(U_{j-k+1}^n, U_{j-k}^n, k/\lambda) - f_{j-k+1}^n + \frac{k}{\lambda} U_{j-k+1}^n]$$

其中 $h^{EO}(u_R, u_L, \xi)$ 表示通量函数为 $f(u) - \xi u$ 的 E_0 格式数值通量函数。

如果 $h^{EO}(u_R, u_L, \xi)$ 代之为广义的LF格式的数值通量函数 U_R, U_L, ξ :

$$h^{LF}(u_R, u_L, \xi) = \frac{1}{2}(f_\xi(u_R) + f_\xi(u_L)) - \frac{1}{2\lambda} Q(U_{RL} - \lambda\xi)(U_R - U_L) \tag{2.3a}$$

$$Q(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq 1 \\ |x| & |x| \geq 1 \end{cases} \tag{2.3b}$$

$$U_{RL} = \begin{cases} \lambda(f(u_R) - f(u_L)) / (u_R - u_L) & u_R \neq u_L \\ \lambda f'(u_R) & u_R = u_L \end{cases} \tag{2.3c}$$

得到大时间步长的广义LF格式(L-LF)

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \lambda(H_{j+1/2}^{LF} - H_{j-1/2}^{LF}) \tag{2.4a}$$

$$H_{j+1/2}^{LF} = h^{LF}(U_{j+1}^n, U_j^n, 0) + \sum_{k=1}^{N-1} [j^{LF}(U_{j+k+1}^n, U_{j+k}^n, -k/\lambda) - f_{j+k}^n - \frac{k}{\lambda} U_{j+k}^n] + h^{LF}(U_{j-k+1}^n, U_{j-k}^n, k/\lambda) - f_{j-k+1}^n + \frac{k}{\lambda} U_{j-k+1}^n \tag{2.4b}$$

引理2.1 由(2.3)定义的 $h^{LF}(u_R, u_L, \xi)$ 满足下列条件:

$$h^{LF}(u_R, u_L, \xi) = \begin{cases} f(u_R) - \xi u_R & \xi \geq \xi_R = (v_{RL} + 1) / \lambda \\ f(u_L) - \xi u_L & \xi \leq \xi_L = (v_{RL} - 1) / \kappa \end{cases} \tag{c(1)}$$

$$\text{sgn}(u_R, u_L) \frac{d^2}{d\xi^2} h^{LF}(u_R, u_L, \xi) \leq 0 \tag{c(2)}$$

$$h^{LF}(u_R, u_R, \xi) = f(u_R) - \xi u_R \tag{c(3)}$$

$$(h^{LF}(u_R, u_L, \xi) - f_\xi(w) \text{sgn}(u_R - u_L)) \leq 0, \quad w = u_{RL}, u_L \tag{c(4)}$$

为了研究L-LF格式的TVD性质, 首先建立多点格式的TVD性判别法则:

引理2.2^[7] (引理2.3): 如果 $2N+1$ 点的守恒型差分格式:

$$U_j^{n+1} = U_j^n + \sum_{k=0}^{N-1} C_{j+k+1/2}^k \Delta U_{j+k+1/2}^n - \sum_{k=0}^{N-1} D_{j-k-1/2}^k \Delta U_{j-k-1/2}^n \quad (2.5)$$

中有下列条件成立, 则此格式为TVD格式,

$$0 \leq C_{j+1/2}^{N-1} \leq \dots \leq C_{j+1/2}^0 \quad (2.6a)$$

$$0 \leq D_{j+1/2}^{N-1} \leq \dots \leq D_{j+1/2}^0 \quad (2.6b)$$

$$0 \leq 1 - C_{j+1/2}^0 - D_{j+1/2}^0 \quad (2.6c)$$

定理2.1 L-LF格式在CFL条件下(2.2)式限制下为TVD格式:

证明: 首先将(2.4)式改成(2.5)式的形式:

$$\begin{aligned} U_j^{n+1} &= U_j^n - \lambda(H_{j+1/2}^{LF} - H_{j-1/2}^{LF}) = U_j^n + C_{j+N-1/2}^{N-1} \Delta U_{j+N-1/2}^n + \sum (C_{j+k-1/2}^{k-1} - C_{j+k-1/2}^k) \Delta U_{j+k-1/2}^n \\ &\quad - \sum_{k=1}^{N-1} (D_{j-k+1/2}^{k-1} - D_{j-k+1/2}^k) \Delta U_{j-k+1/2}^n - D_{j-N+1/2}^{N-1} \Delta U_{j-N+1/2}^n \end{aligned} \quad (2.4')$$

其中:

$$C_{j+1/2}^k = -\lambda[h^{LF}(U_{j+1}^n, U_j^n, -k/\lambda) - f_j^n - \frac{k}{\lambda} U_j^n] / \Delta U_{j+1/2}^n$$

$$D_{j+1/2}^k = -\lambda[h^{LF}(U_{j+1}^n, U_j^n, k/\lambda) - f_{j+1}^n + \frac{k}{\lambda} U_{j+1}^n] / \Delta U_{j+1/2}^n$$

因此, 要证明(2.4)式为TVD格式, 只需证明:

$$(1) C_{j+1/2}^{N-1} \geq 0, D_{j+1/2}^{N-1} \geq 0$$

$$(2) -2C_{j+1/2}^{N-1} + C_{j+1/2}^{N-2} \geq 0, -2D_{j+1/2}^{N-1} + D_{j+1/2}^{N-2} \geq 0$$

$$(3) C_{j+1/2}^{k+1} - 2C_{j+1/2}^k \geq 0, D_{j+1/2}^{k+1} - 2D_{j+1/2}^k \geq 0, k=1, 2, \dots, N-2$$

$$(4) 1 - (C_{j+1/2}^0 - C_{j+1/2}^1) - (D_{j+1/2}^0 - D_{j+1/2}^1) \geq 0$$

由引理2.1容易得知(1),(3),(4)成立。

$$\begin{aligned} &-2C_{j+1/2}^{N-1} + C_{j+1/2}^{N-2} \\ &= \frac{1}{2}(N + V_{j+1/2}^n) - Q(N-1 + V_{j+1/2}^n) + \frac{1}{2}Q(N-2 + V_{j+1/2}^n) \\ &= \frac{1}{2}(x+1) - Q(x) + \frac{1}{2}Q(x-1) \end{aligned}$$

其中 $x = N - 1 + V_{j+1/2}^n$, 由CFL条件(2.2)式知 $x+1 \geq 0$, 即 $x \geq -1$ 。

(a)如果 $-1 \leq x \leq 0$, 则

$$-2C_{k+1/2}^{N-1} + C_{j+1/2}^{N-2} = \frac{1}{2}(x+1) - 1 + \frac{1}{2}(1-x) = 0$$

(b) 如果 $0 \leq x \leq 1$, 则

$$-2C_{k+1/2}^{N-1} + C_{j+1/2}^{N-2} = \frac{1}{2}(x+1) - 1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}x \geq 0$$

(c) 如果 $1 \leq x \leq 2$, 则

$$-2C_{k+1/2}^{N-1} + C_{j+1/2}^{N-2} = \frac{1}{2}(x+1) - x + \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}x \geq 0$$

(d) 如果 $x \geq 2$, 则

$$-2C_{j+1/2}^{N-1} + C_{j+1/2}^{N-2} = \frac{1}{2}(x+1) - x + \frac{1}{2}(x-1) = 0$$

所以, $-2C_{j+1/2}^{N-1} + C_{j+1/2}^{N-2} \geq 0$.

同理可证: $-2D_{j+1/2}^{N-1} + D_{j+1/2}^{N-2} \geq 0$, 所以(2)成立。因此, L-LF在CFL条件(2.2)式限制下为TV D格式。

3 差分格式对方程组的推广

考虑双曲守恒律方程组初值问题

$$(3.1) \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \bar{U} + \frac{\partial}{\partial x} \bar{f}(\bar{u}) = 0 & t > 0 \\ \bar{u}(x,0) = \bar{u}_0(x) & -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

其中: $\bar{u} \in R^m, \bar{f}: R^m \rightarrow R^m$ 。记 \bar{f} 的Jacobi矩阵为 $A(\bar{u})$ 。由于方程组是双曲型的, 因此, A 有一组对应于特征值 $a^l(\bar{u})$ 的左、右特征向 $L^l(\bar{u}), R^l(\bar{u})$ ($1 \leq l \leq m$) 量满足:

$$L^l R^l = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \dots, m)$$

$$L A R = \Lambda$$

其 $L = (L^1, \dots, L^m)^T, R = (R^1, \dots, R^m)$ 中:

$$\Lambda = \text{diag}(a^1, \dots, a^m)$$

记 $\bar{U}_{j+1/2} = V(\bar{U}_{j+1/2}, \bar{U}_j)$ 是 \bar{U}_{j+1}, \bar{U}_j 的一个平均值, 其中函数 $V(\bar{u}, \bar{v})$ 是光滑的, 满足:

$$\begin{cases} V(\bar{u}, \bar{v}) = V(\bar{v}, \bar{u}) \\ V(\bar{u}, \bar{u}) = \bar{u} \end{cases}$$

对 $A(\bar{U}_{j+1/2})$ 地, 的特征值, 特征向 $a_{j+1/2}^l, L_{j+1/2}^l, R_{j+1/2}^l$ 量 记 $\alpha_{j+1/2}^l$ 为, 定义为:

$$\alpha_{j+1/2}^l = L_{j+1/2}^l \Delta \bar{U}_{j+1/2}$$

单个守恒律问题的L-LF格式推广到方程组的情形的格式为:

$$\bar{\tilde{U}}_j = \bar{U}_j - \lambda (\bar{H}_{j+1/2}^{L^l} - \bar{H}_{j-1/2}^{L^l}) \tag{3.2a}$$

$$\begin{aligned} \bar{H}_{j+1/2}^{LF} = & \bar{h}(\bar{u}_{j+1}, \bar{u}_j, 0) + \sum_{k=1}^{N-1} [\bar{h}(\bar{u}_{j+k+1}, \bar{u}_{j+k}, k/\lambda) - \bar{f}(\bar{u}_{j+k}) \\ & - \frac{k}{\lambda} \bar{U}_{j+k} + \bar{h}(\bar{u}_{j-k+1}, \bar{u}_{j-k}, -k/\lambda) - \bar{f}(\bar{u}_{j-k+1}) + \frac{k}{\lambda} \bar{u}_{j-k+1}] \end{aligned} \quad (3.2b)$$

$$\bar{h}(\bar{u}_{j+1}, \bar{u}_j, \xi) = \frac{1}{2}(\bar{f}'_{\xi}(\bar{u}_{j+1}) + \bar{f}'_{\xi}(\bar{u}_j)) - \frac{1}{2\lambda} \sum_{l=1}^m R'_{j+1/2} Q(v'_{j+1/2} - \lambda\xi) \alpha'_{j+1/2} \quad (3.2c)$$

其中： $v'_{j+1/2} = \lambda \alpha'_{j+1/2}$ 。

对于非线性方程组问题，至今还无法解决判断差分格式TVD性质这个问题，但是数值试验结果表明，这种推广方法是有效的。

4 数值例子

考虑拟一维Euler方程组定常喷管问题：

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial F(\bar{u})}{\partial x} + H(\bar{u}) = 0 \quad (4.1)$$

其中：

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} \rho A \\ mA \\ eA \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} mA \\ (m^2 / \rho + p)A \\ (e + p)mA / e \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 0 \\ -p \frac{\alpha A}{dt} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

$$A = A(x) = 1.398 + 0.347TNAH(0.8x - 4.0)$$

$$p = (r - 1)(e - \frac{1}{2}m^2 / \rho), \quad v = m / \rho$$

这里 U, P, ρ, m, e 分别表示速度、压力、密度、动量及总能。 $r=1.4$ 。

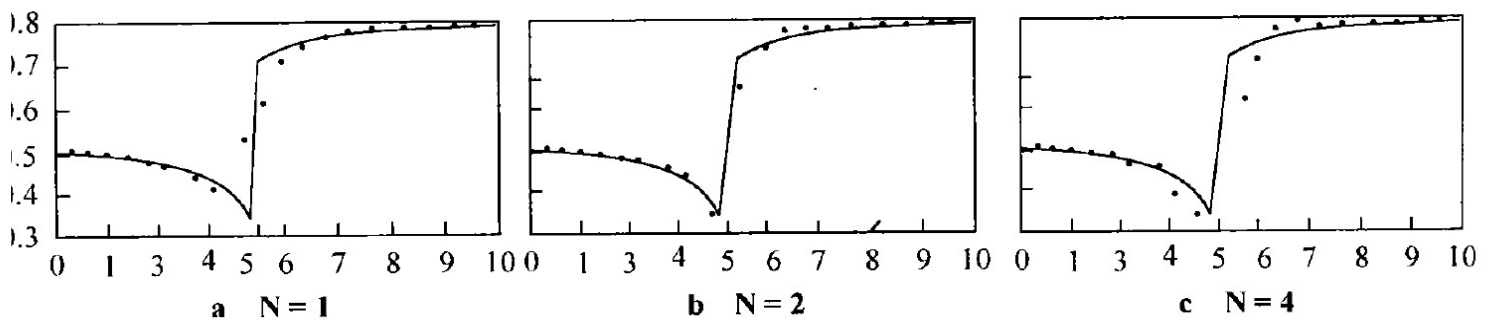


图1 密度 ρ 的计算结果图

对于格式(3.2)式，我们应用H.C.Yee^[7]中给出的初值条件，而边界边件的计算如下：对于内点，除按(3.2)式格式所能得到的之外，其余各点均采用一阶LF格式(即(3.2)式格式当 $N=1$ 时)计算，对于右端点的 e 和 m ，采用一阶线性外插得到：取 $\Delta x=0.5, CFL=0.8$ ，对于 $N=1, 2, 4$ 分别计算700, 350和175时间步，密度 ρ 的计算结果如图1。图中“·”表示计算值，实线表示精确解。从图中可以看出， $N=2$ 时的计算效果比用著名的LF格式($N=1$)的计算效果要好得多，激波的过渡区较窄，分辨率较高。当 $N=4$ 时，激波过渡区也较窄，但出现了振荡现

象。因此这类格式在实际实用中是有价值的。从总体情况看, 计算结果是令人满意的。

参考文献

- 1 Y. Brenier. *Averaged multivalued solutions for scalar conservation laws*. *SIAM. J. Numer. Anal.*, 1984(21): 1013~1037
- 2 Y. Brenier & S. Osher. *Approximate Riemann solvers and numerical flux functions*. *SIAM. J. Numer. Anal.*, 1986, 23: 259~273
- 3 A. Harten. *High resolution schemes for hyperbolic conservation laws*. *J. Comp. Phys.*, 1983(49): 357~393
- 4 R. J. Leveque. *Large time-step capturing techniques for scalar conservation laws*. *SIAM. J. Numer. Anal.*, 1982 (18): 1091~1109
- 5 P. L. Roe. *The use of Riemann problem in finite difference schemes*. *Proc. 7th Internat. Conf. on Numerical Methods in Fluid Dynamics*, 354~365
- 6 H. C. Yee, R. F. Warming & A. Harten. *Implicit Total Variation Diminishing (TVD) schemes to steady-state calculation*. *J. Comp. Phys.*, 1985(57): 327~360
- 7 邱建贤. 大时间步长的广义逆风格式. *厦门水产学院学报*, 1992. 14(1): 66~79

A Class of Generalization Lax-Friedrichs Schemes

Qiu Jianxian You Keyi

(Fisheries college, Jimei Univ., Xiamen 361021)

Abstract In this paper, we present a class of new first-order accurate $(2N+1)$ -point explicit schemes for the computation of weak solutions of hyperbolic conservation laws. These schemes are TVD schemes under a CFL-like restriction of N . The numerical solutions obtained in calculation of initial value problem are satisfied.

Key words conservation laws, TVD, large time-step, difference scheme