

文章编号] 1001-246X(2001)03-0241-06

二维交错网格的 GAUSS 型格式

邱建贤, 戴嘉尊

(南京航空航天大学理学院, 江苏 南京 210016)

[摘 要] 利用 Gauss 型求积公式在交错网格的情况下构造了一类不需解 Riemann 问题的求解二维双曲守恒律的二阶显式 Gauss 型差分格式, 该格式在 CFL 条件限制下为 MmB 格式. 并将格式推广到二维方程组, 进行了数值试验.

[关键词] 守恒律; MmB; 通量; 差分格式; 交错网格

[中图分类号] O241; O35 [文献标识码] A

1 引言

本文研究在交错网格下利用 Gauss 型差分格式求解二维单个双曲守恒律初值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} + \frac{\partial g(u)}{\partial y} = 0, & t > 0, \quad (x, y) \in R \times R, \quad f, g \in C^2(R) \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y), & (x, y) \in R \times R \end{cases} \quad (1)$$

的数值解. 众所周知, 当 $f'' \neq 0, g'' \neq 0$ 时, 即使 $u_0(x, y)$ 是 x 的相当光滑的函数, 式(1)的解也可能产生间断, 即产生激波. 因此, 寻求具有高分辨, 不振荡等良好性质的激波捕捉方法一直是计算数学工作者大力研究的问题. 1983 年, Harten^[1] 首创了二阶 TVD (Total-Variation-Diminishing) 格式, 这类格式具有高分辨, 不振荡等良好性质. 然而, 对于二维的情况, TVD 格式只能是一阶格式. 1989 年 Wu H M^[3] 从单个线性双曲守恒律出发, 构造了二维双曲型守恒律的二阶精度的 MmB (Maximum and minimum Bounds) 差分格式, 使构造二维高分辨格式有了新的突破.

定义 1 若给定式(1)的差分格式

$$u_h(p) = L_h u_h(\Omega_h^t), \quad p \in \Omega_h^{t+1}, \quad (2)$$

满足条件

$$\min_{p \in \Omega_h^t} u_h(p) \leq u_h(p) \leq \max_{p \in \Omega_h^t} u_h(p), \quad (3)$$

则称格式(2)为 MmB 差分格式.

本文在交错网格的情况下, 利用 Gauss 型求积公式构造了一类不需解 Riemann 问题的求解二维单个双曲守恒律的二阶显式 Gauss 型差分格式, 证明了该格式在 CFL 条件限制下为 MmB 格式, 然后将格式推广到二维方程组的情形, 并进行了数值试验, 得到的试验结果令人满意. 本文之所以要在交错网格的情况下构造差分格式, 是由于在这种情况下所构造的差分格式不需要解 Riemann 问题, 因此具有计算简单、工作量少、编程简便等特点.

1 二维交错网格的 GAUSS 型差分格式

记 x 和 y 方向的空间步长分别为 Δx 和 Δy , 时间步长为 Δt , x 和 y 方向的步长比分别为 $\lambda = \Delta t / \Delta x$ 和 $t = \Delta t / \Delta y$, $x_j = j \Delta x$, $y_k = k \Delta y$, $t_n = n \Delta t$, $x_{j+1/2} = (j+1/2) \Delta x$, $y_{k+1/2} = (k+1/2) \Delta y$, $I_{j,k} = [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}] \times [y_{k-1/2}, y_{k+1/2}]$, $I_{j+1/2, k+1/2} = [x_j, x_{j+1}] \times [y_k, y_{k+1}]$.

[收稿日期] 1999-10-24; [修回日期] 2000-05-15

[基金项目] 国家航空基金(96A52004)资助项目

下面我们来描述二维交错网格的 Gauss 型格式的构造.

用 $v_{j,k}^n$ 和 $v_{j+1/2,k+1/2}^n$ 分别表示 $u(x, y, t)$ 在时间层 t_n 时在区域 $I_{j,k}$ 和 $I_{j+1/2,k+1/2}$ 上的平均值, 即

$$v_{j,k}^n = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{I_{j,k}} u(x, y, t_n) dx dy, \quad v_{j+1/2,k+1/2}^n = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{I_{j+1/2,k+1/2}} u(x, y, t_n) dx dy. \quad (4)$$

在每个时间层上我们利用线性逼近对平均值函数进行重构

$$v(x, y, t_n) = L_{j,k}(x, y, t_n) = v_{j,k}^n + \frac{x - x_j}{\Delta x} v'_{j,k} + \frac{y - y_k}{\Delta y} w'_{j,k}, \quad (x, y) \in I_{j,k}, \quad (5a)$$

其中

$$\frac{1}{\Delta x} v'_{j,k} = \left. \frac{\partial u(x, y, t_n)}{\partial x} \right|_{(x_j, y_k)} + O(\Delta x), \quad \frac{1}{\Delta y} w'_{j,k} = \left. \frac{\partial u(x, y, t_n)}{\partial y} \right|_{(x_j, y_k)} + O(\Delta y). \quad (5b)$$

利用重构函数代替方程(1)中的函数 $u(x, y, t)$, 并在区间 $[t_n, t_{n+1}] \times I_{j+1/2,k+1/2}$ 上积分, 得到

$$\begin{aligned} v_{j+1/2,k+1/2}^{n+1} = & \frac{1}{4} (v_{j+1,k+1}^n + v_{j+1,k}^n + v_{j,k+1}^n + v_{j,k}^n) - \frac{1}{16} (v'_{j+1,k} - v'_{j,k} + \\ & v'_{j+1,k+1} - v'_{j,k+1} + w'_{j+1,k} - w'_{j+1,k+1} + w'_{j,k} - w'_{j,k+1}) - \\ & \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{y_k}^{y_{k+1}} (f(v(x_{j+1}, y, t)) - f(v(x_j, y, t))) dy dt - \\ & \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_j}^{x_{j+1}} (g(v(x, y_{k+1}, t)) - g(v(x, y_k, t))) dx dt. \end{aligned} \quad (6)$$

分别利用两点 Gauss 求积公式逼近式(6)中关于 t 的积分, 利用梯形求积公式逼近式(6)中关于 x 和 y 的积分, 我们得到在交错网格情况下的 Gauss 型格式

$$\begin{aligned} v_{j+1/2,k+1/2}^{n+1} = & \frac{1}{4} (v_{j+1,k+1}^n + v_{j+1,k}^n + v_{j,k+1}^n + v_{j,k}^n) - \frac{1}{16} (v'_{j+1,k} - v'_{j,k} + v'_{j+1,k+1} - v'_{j,k+1} - \\ & w'_{j+1,k} + w'_{j+1,k+1} + w'_{j,k} - w'_{j,k+1}) - \frac{\lambda}{2} (h_{j+1,k}^n - h_{j,k}^n + h_{j+1,k+1}^n - h_{j,k+1}^n) - \\ & \frac{\mu}{2} (r_{j,k+1}^n - r_{j,k}^n + r_{j+1,k+1}^n - r_{j+1,k}^n), \end{aligned} \quad (7a)$$

$$h_{j,k}^n = \frac{1}{2} (f(v_{j,k}^n - h_1 f'_{j,k}) + f(v_{j,k}^n - h_2 f'_{j,k})),$$

$$r_{j,k}^n = \frac{1}{2} (g(v_{j,k}^n - h_3 g'_{j,k}) + g(v_{j,k}^n - h_4 g'_{j,k})). \quad (7b)$$

其中

$$\frac{1}{\Delta x} f'_{j,k} = \left. \frac{\partial f(v(x, y, t_n))}{\partial x} \right|_{(x_j, y_k)} + O(\Delta x), \quad \frac{1}{\Delta y} g'_{j,k} = \left. \frac{\partial g(v(x, y, t_n))}{\partial y} \right|_{(x_j, y_k)} + O(\Delta y), \quad (7c)$$

$$h_1 = \lambda \left[\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} \right], \quad h_2 = \lambda \left[\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} \right], \quad h_3 = \mu \left[\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} \right], \quad h_4 = \mu \left[\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} \right].$$

利用 Taylor 展开式, 我们容易证明下列定理:

定理 1 当由式(5b)和式(7c)定义的数值导数的一阶扰动项是 Lipschitz 连续的, 则由(7)式定义的 Gauss 型格式在函数 $u(x, y, t)$ 的充分光滑区域为时空二阶精度格式.

定理 2 如果 Gauss 型格式(7)中的数值微分 $v'_{j,k}$, $w'_{j,k}$, $f'_{j,k}$, $g'_{j,k}$ 满足以下条件

$$0 \leq v'_{j,k} \Delta v_{j+1/2,k}^n \leq \alpha \mid MM(\Delta v_{j+1/2,k}^n, \Delta v_{j-1/2,k}^n) \mid, \quad (8a)$$

$$0 \leq w'_{j,k} \Delta w_{j,k+1/2}^n \leq \alpha \mid MM(\Delta w_{j,k+1/2}^n, \Delta w_{j,k-1/2}^n) \mid, \quad (8b)$$

$$0 \leq f'_{j,k} \Delta v_{j+1/2,k}^n \leq \beta_f \mid MM(\Delta f_{j+1/2,k}^n, \Delta f_{j-1/2,k}^n) \mid, \quad (8c)$$

$$0 \leq g'_{j,k} \Delta w_{j,k+1/2}^n \leq \beta_g \mid MM(\Delta g_{j,k+1/2}^n, \Delta g_{j,k-1/2}^n) \mid. \quad (8d)$$

那么, 在 CFL 条件(9)的限制下, 格式(7)为 MmB 格式.

证明 记

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{4} + \lambda \frac{h_{j+1,k}^n - h_{j,k}^n}{2\Delta v_{j+1/2,k}^n} + \frac{v'_{j+1,k} - v'_{j,k}}{16\Delta v_{j+1/2,k}^n} + \mu \frac{r_{j,k+1}^n - r_{j,k}^n}{2\Delta v_{j,k+1/2}^n} + \frac{w'_{j,k+1} - w'_{j,k}}{16\Delta v_{j,k+1/2}^n}, \\
 B &= \frac{1}{4} - \lambda \frac{h_{j+1,k}^n - h_{j,k}^n}{2\Delta v_{j+1/2,k}^n} - \frac{v'_{j+1,k} - v'_{j,k}}{16\Delta v_{j+1/2,k}^n} + \mu \frac{r_{j+1,k+1}^n - r_{j+1,k}^n}{2\Delta v_{j+1,k+1/2}^n} + \frac{w'_{j+1,k+1} - w'_{j+1,k}}{16\Delta v_{j+1,k+1/2}^n}, \\
 C &= \frac{1}{4} + \lambda \frac{h_{j+1,k+1}^n - h_{j,k+1}^n}{2\Delta v_{j+1/2,k+1}^n} + \frac{v'_{j+1,k+1} - v'_{j,k+1}}{16\Delta v_{j+1/2,k+1}^n} - \mu \frac{r_{j,k+1}^n - r_{j,k}^n}{2\Delta v_{j,k+1/2}^n} - \frac{w'_{j,k+1} - w'_{j,k}}{16\Delta v_{j,k+1/2}^n}, \\
 D &= \frac{1}{4} - \lambda \frac{h_{j+1,k+1}^n - h_{j,k+1}^n}{2\Delta v_{j+1/2,k+1}^n} - \frac{v'_{j+1,k+1} - v'_{j,k+1}}{16\Delta v_{j+1/2,k+1}^n} - \mu \frac{r_{j+1,k+1}^n - r_{j+1,k}^n}{2\Delta v_{j+1,k+1/2}^n} - \frac{w'_{j+1,k+1} - w'_{j+1,k}}{16\Delta v_{j+1,k+1/2}^n}.
 \end{aligned}$$

则格式(7)可改写为以下形式

$$v_{j+1/2,k+1/2}^{n+1} = Av_{j,k}^n + Bv_{j+1,k}^n + Cv_{j,k+1}^n + Dv_{j+1,k+1}^n. \tag{10}$$

由于 $A+B+C+D=1$, 所以, 要证明格式(7)为 MmB 格式, 只需证明 A, B, C, D 均非负即可. 因为

$$\begin{aligned}
 \lambda \left| \frac{h_{j+1,k}^n - h_{j,k}^n}{\Delta v_{j+1/2,k}^n} \right| &\leq \frac{\lambda}{2} \left| \frac{f(v_{j+1,k}^n - h_1 f'_{j+1,k}) - f(v_{j,k}^n - h_1 f'_{j,k})}{(v_{j+1,k}^n - h_1 f'_{j+1,k}) - (v_{j,k}^n - h_1 f'_{j,k})} \right| \times \\
 &\quad \left| \frac{(v_{j+1,k}^n - h_1 f'_{j+1,k}) - (v_{j,k}^n - h_1 f'_{j,k})}{\Delta v_{j+1/2,k}^n} \right| + \\
 &\quad \frac{\lambda}{2} \left| \frac{f(v_{j+1,k}^n - h_2 f'_{j+1,k}) - f(v_{j,k}^n - h_2 f'_{j,k})}{(v_{j+1,k}^n - h_2 f'_{j+1,k}) - (v_{j,k}^n - h_2 f'_{j,k})} \right| \times \\
 &\quad \left| \frac{(v_{j+1,k}^n - h_2 f'_{j+1,k}) - (v_{j,k}^n - h_2 f'_{j,k})}{\Delta v_{j+1/2,k}^n} \right|, \\
 \mu \left| \frac{r_{j,k+1}^n - r_{j,k}^n}{\Delta v_{j,k+1/2}^n} \right| &\leq \frac{\mu}{2} \left| \frac{g(v_{j+1,k}^n - h_3 g'_{j,k+1}) - g(v_{j,k}^n - h_3 g'_{j,k})}{(v_{j,k+1}^n - h_3 g'_{j,k+1}) - (v_{j,k}^n - h_3 g'_{j,k})} \right| \times \\
 &\quad \left| \frac{(v_{j,k+1}^n - h_3 g'_{j,k+1}) - (v_{j,k}^n - h_3 g'_{j,k})}{\Delta v_{j,k+1/2}^n} \right| + \\
 &\quad \frac{\mu}{2} \left| \frac{g(v_{j+1,k}^n - h_4 g'_{j,k+1}) - g(v_{j,k}^n - h_4 g'_{j,k})}{(v_{j,k+1}^n - h_4 g'_{j,k+1}) - (v_{j,k}^n - h_4 g'_{j,k})} \right| \times \\
 &\quad \left| \frac{(v_{j,k+1}^n - h_4 g'_{j,k+1}) - (v_{j,k}^n - h_4 g'_{j,k})}{\Delta v_{j,k+1/2}^n} \right|.
 \end{aligned}$$

由 CFL 条件(9)可知

$$\begin{aligned}
 \lambda \left| \frac{f(v_{j+1,k}^n - h_1 f'_{j+1,k}) - f(v_{j,k}^n - h_1 f'_{j,k})}{(v_{j+1,k}^n - h_1 f'_{j+1,k}) - (v_{j,k}^n - h_1 f'_{j,k})} \right| &\leq CFL, \quad i = 1, 2, \\
 \mu \left| \frac{g(v_{j+1,k}^n - h_i g'_{j,k+1}) - g(v_{j,k}^n - h_i g'_{j,k})}{(v_{j,k+1}^n - h_i g'_{j,k+1}) - (v_{j,k}^n - h_i g'_{j,k})} \right| &\leq CFL, \quad i = 3, 4,
 \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{(v_{j+1,k}^n - h_1 f'_{j+1,k}) - (v_{j,k}^n - h_1 f'_{j,k})}{\Delta v_{j+1/2,k}^n} \right| &\leq 1 + h_i \left| \frac{\Delta f'_{j+1/2,k}}{\Delta v_{j+1/2,k}^n} \right|, \quad i = 1, 2, \\
 \left| \frac{(v_{j,k+1}^n - h_i g'_{j,k+1}) - (v_{j,k}^n - h_i g'_{j,k})}{\Delta v_{j,k+1/2}^n} \right| &\leq 1 + h_i \left| \frac{\Delta g'_{j,k+1/2}}{\Delta v_{j,k+1/2}^n} \right|, \quad i = 3, 4,
 \end{aligned}$$

由式(8)和式(9)得到

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{\Delta v'_{j+1/2,k}}{\Delta v_{j+1/2,k}^n} \right| &\leq \max \left[\left| \frac{v'_{j+1,k}}{\Delta v_{j+1/2,k}^n} \right|, \left| \frac{v'_{j,k}}{\Delta v_{j+1/2,k}^n} \right| \right] \leq \alpha, \\
 \left| \frac{\Delta w'_{j,k+1/2}}{\Delta v_{j,k+1/2}^n} \right| &\leq \max \left[\left| \frac{w'_{j,k+1}}{\Delta v_{j,k+1/2}^n} \right|, \left| \frac{w'_{j,k}}{\Delta v_{j,k+1/2}^n} \right| \right] \leq \alpha,
 \end{aligned}$$

$$\left| \frac{\Delta f'_{j+1/2, k}}{\Delta v_{j+1/2, k}^n} \right| \leq \max \left[\left| \frac{f'_{j+1, k}}{\Delta v_{j+1/2, k}^n} \right|, \left| \frac{f'_{j, k}}{\Delta v_{j+1/2, k}^n} \right| \right] \leq \beta_f = \frac{1}{\lambda} \alpha \circ CFL,$$

$$\left| \frac{\Delta g'_{j, k+1/2}}{\Delta v_{j, k+1/2}^n} \right| \leq \max \left[\left| \frac{g'_{j, k+1}}{\Delta v_{j, k+1/2}^n} \right|, \left| \frac{g'_{j, k}}{\Delta v_{j, k+1/2}^n} \right| \right] \leq \beta_g = \frac{1}{\mu} \alpha \circ CFL.$$

所以,

$$\lambda \left| \frac{h_{j+1, k}^n - h_{j, k}^n}{\Delta v_{j+1/2, k}^n} \right| \leq \frac{1}{2} [CFL \circ (1 + h_1 \beta_f) + CFL \circ (1 + h_2 \beta_f)] = CFL \circ (1 + \frac{1}{2} \alpha \circ CFL),$$

$$\mu \left| \frac{r_{j, k+1}^n - r_{j, k}^n}{\Delta v_{j, k+1/2}^n} \right| \leq \frac{1}{2} [CFL \circ (1 + h_3 \beta_g) + CFL \circ (1 + h_4 \beta_g)] = CFL \circ (1 + \frac{1}{2} \alpha \circ CFL).$$

因此, $A \geq \frac{1}{4} - (CFL \circ (1 + \frac{1}{2} \alpha \circ CFL)) - \frac{\alpha}{8} \geq 0$. 同理可证 B, C, D 均非负.

故 Gauss 型格式(7)在(8)式和(9)式的限制下为 MmB 格式.

2 方程组情形

在这一节里, 我们考虑将求解单个双曲守恒律的差分格式(7)推广到求解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} + \frac{\partial G(U)}{\partial y} = 0, & t > 0, \\ U(x, y, 0) = U_0(x, y), & (x, y) \in R^2. \end{cases} \quad (11)$$

其中

$$U = U(x, y, t) = (u^1(x, y, t), \dots, u^m(x, y, t))^T \in R^m,$$

$$F(U) = (f^1(U), \dots, f^m(U))^T, \quad G(U) = (g^1(U), \dots, g^m(U))^T \in L(R^m, R^m).$$

记式(11)在 (x_j, y_k, t_n) 处的近似解为 $V_{j, k}^n = (v_{j, k}^1, \dots, v_{j, k}^m)^T$, 将(7)式改写为向量形式, 得到求解(11)式的差分格式

$$\begin{aligned} V_{j+1/2, k+1/2}^{n+1} = & \frac{1}{4} (V_{j+1, k+1}^n + V_{j+1, k}^n + V_{j, k+1}^n + V_{j, k}^n) - \frac{1}{16} (V'_{j+1, k} - V'_{j, k} + V'_{j+1, k+1} - V'_{j, k+1} - \\ & W'_{j+1, k} + W'_{j+1, k+1} + W'_{j, k} - W'_{j, k+1}) - \frac{\lambda}{2} (H_{j+1, k}^n - H_{j, k}^n + H_{j+1, k+1}^n - H_{j, k+1}^n) - \\ & \frac{\mu}{2} (R_{j, k+1}^n - R_{j, k}^n + R_{j+1, k+1}^n - R_{j+1, k}^n). \end{aligned} \quad (12)$$

其中

$$H_{j, k}^n = \frac{1}{2} (F(V_{j, k}^n - h_1 F'_{j, k}) + F(V_{j, k}^n - h_2 F'_{j, k})),$$

$$R_{j, k}^n = \frac{1}{2} (G(V_{j, k}^n - h_3 G'_{j, k}) + G(V_{j, k}^n - h_4 G'_{j, k})).$$

数值微分 $V'_{j, k}, W'_{j, k}, F'_{j, k}, G'_{j, k}$ 的每一个分量按(8)式的定义选取.

3 数值试验

本节我们分别给出利用 Harten^[1] 的 TVD 格式及本文的 Gauss 型格式(7)、(12)在 Pentium MMX 300 的微机上进行数值实验的例子.

例 1 用本文的 Gauss 型格式(7)求解二维单个双曲守恒律初值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - u \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial u}{\partial y} = 0, & t \geq 0, \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y), & 0 \leq x, y \leq 1 \end{cases}$$

$$u_0(x, y) = \begin{cases} -0.5, & 0 \leq x, y < 0.5, \\ 0.5, & 0.5 \leq x, y \leq 1, \\ 0.25, & \text{其他.} \end{cases}$$

取空间步长 $\Delta x = \Delta y = 1/80$, 数值导数为(8)式中取 $\alpha = 1, CFL = 0.2$, 计算 $t = 1.5$ 时的结果, 图 1 表示精确解, 图 2 表示计算结果.

例 2 考虑二维无粘可压缩流体力学 Euler 方程组

$$U = (\rho, m, n, E)^T,$$

$$F(U) = (m, m^2/\rho + p, mn/\rho, m(E+p)/\rho)^T,$$

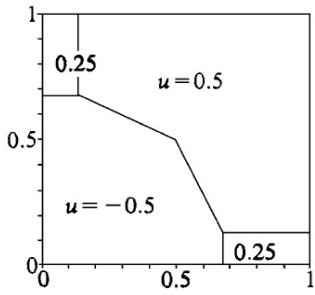


图 1 算例 1 的精确解

Fig.1 Exact solution for example 1

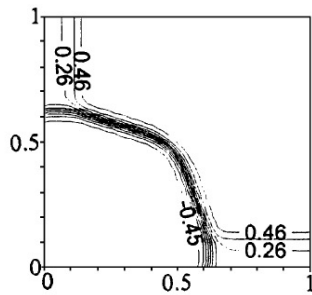


图 2 算例 1 Gauss 格式的计算解

Fig.2 Numerical solution by Gauss scheme (7) for example 1

$$p = (\gamma - 1) \left(E - \frac{1}{2} (m^2 + n^2) / \rho \right),$$

$$u = m / \rho, \quad v = n / \rho, \quad c = \sqrt{\gamma p / \rho}.$$

其中 u, v, p, ρ 分别为 x 方向和 y 方向的速度、压力、密度, m, n, E, c 分别为 x 方向和 y 方向的动量、总能及当地音速, γ 是绝热指数, 这里取 $\gamma = 1.4$.

算例 2A 定常规则激波反射问题. 应用文[5]中给出的初边值条件, 计算区域为 $0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 1$. 选取 $\Delta x = 1/15, \Delta y = 1/20$, 数值导数为(8)式中取 $\alpha = 1, CFL = 0.11$, 迭代 1 000 时间步达到定常解, 密度和压力的等值线示意图见图 3 和图 4. 计算时间的对比: Harten 的 TVD 格式的计算时间为 33 min 08 s, 本文的 Gauss 型格式(12)的计算时间为 11 min 15 s.

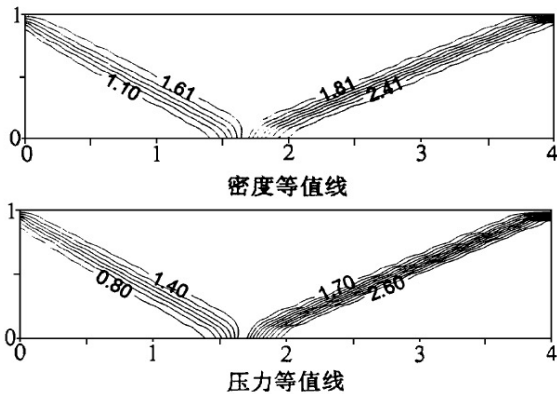


图 3 算例 2A 中 TVD 格式的计算解
Fig.3 Numerical solution by Harten's TVD scheme for example 2A

算例 2B 非定常双马赫数激波反射问题. 应用文[8]中给出的初边值条件, 计算区域为 $0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 1$. 数值导数为(8)式中取 $\alpha = 1, CFL = 0.11$.

①取 $\Delta x = \Delta y = 1/30$, 图 5 是 $t = 0.2$ 时的密度等值线. 计算时间的对比: Harten 的 TVD 格式的计算时间为 33 min 56 s, 本文的 Gauss 型格式(12)的计算时间为 11 min 08 s.

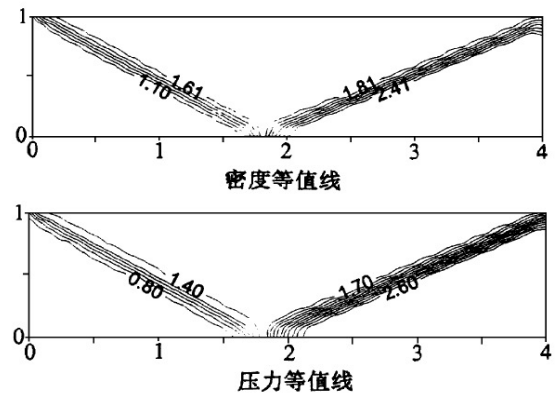


图 4 算例 2A 中本文 Gauss 格式的计算解
Fig.4 Numerical solution by Gauss scheme (7) for example 2A

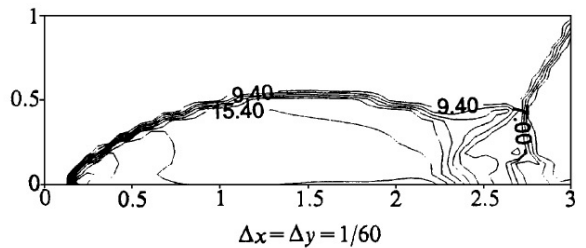
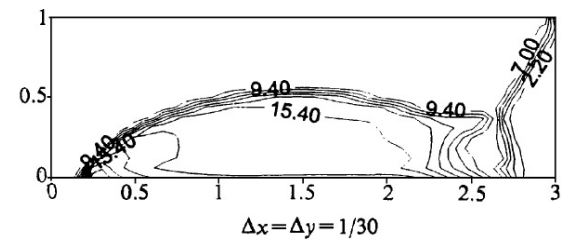


图 5 算例 2B 中 TVD 格式的计算解
Fig.5 Numerical solution by Harten's TVD scheme for example 2B

②取 $\Delta x = \Delta y = 1/60$, 图 6 是 $t = 0.2$ 时的密度等值线. 计算时间的对比: Harten 的 TVD 格式的计算时间为 33 min 24 s, 本文的 Gauss 型格式(12)的计算时间为 11 min 08 s.

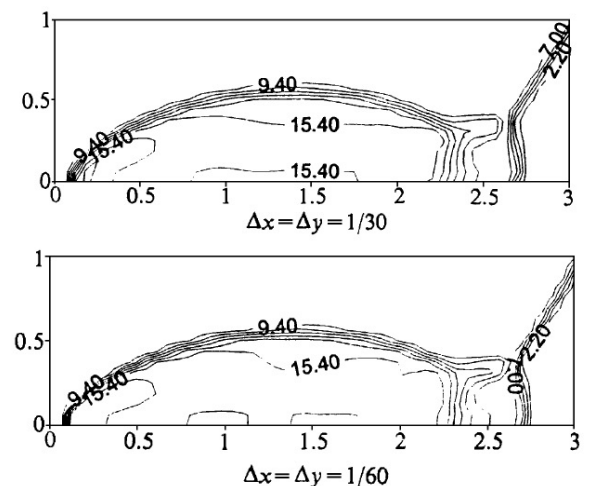


图 6 算例 2B 中本文 Gauss 格式的计算解
Fig.6 Numerical solution by

从计算结果和计算时间的比较, 我们可以看出, 本文所构造的差分格式是一个行之有效的方法.

[参 考 文 献]

- 1] Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws [J]. *J Comp Phys*, 1983, **49**: 357—393.
- 2] Harten A. On a class of high resolution total-variation-stable finite-difference schemes [J]. *SIAM Numer Anal*, 1984, **21**: 1—23.
- 3] Wu H M, Yang S L. MmB—A New Class of Accurate High Resolution Schemes for Conservation Laws in Two Dimensions [C]. Preprint SC 89-6, Konrad-Zuse-Zentrum fur Information stechnik Berlin, Juli, 1989.
- 4] Engquist B, Osher S. One-Sided Difference Approximations for Nonlinear Conservation Laws [J]. *Math of Comp*, 1981, **36**(154): 321—351.
- 5] Yee H C, etc. Implicit Total Variation Diminishing (TVD) Schemes for Steady-State Calculations [J]. *J of Comp Phys*, 1985, **57**: 327—360.
- [6] Nssyahu H, Tadmor E. Non-oscillatory Central Differencing for Hyperbolic Conservation Laws [J]. *J of Comp Phys*, 1990, **87**: 408—463.
- [7] Jiang G S, et al. High-resolution Nonoscillatory Central Schemes with Nonstaggered Grids for Hyperbolic Conservation Laws [J]. *SIAM Numer Anal*, 1998, **35**(6): 2147—2168.
- [8] Jiang G S, Tadmor E. Nonoscillatory Central Scheme for Multidimensional Hyperbolic Conservation Law [J]. *SIAM J Sci Comput*, 1998, **19**(6): 1892—1917.
- [9] 邱建贤, 尤克义. 求解常微分方程的 Gauss 型差分格式 [J]. *集美大学学报*, 1997, **2**(4): 1—5.
- [10] 郑华盛, 赵宁, 戴嘉尊. 一类时空二阶精度高分辨 MmB 差分格式的构造及数值实验 [J]. *计算数学*, 1998, **20**(2): 137—146.

A CLASS OF GAUSS SCHEMES WITH STAGGERED GRIDS IN TWO DIMENSIONS

QIU Jian-xian, DAI Jia-zun

(College of Science, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, P R China)

Abstract] It presents a class of the second order accurate explicit Gauss schemes with staggered grids for the computation of solutions of single hyperbolic conservation laws in two dimernsions, these schemes are Riemann solver-free and Maximum and Minimun bounds under the restriction of CFL, and have been extended to system of hyperbolic conservation laws. Because these schemes are constructed under staggered grids and Riemann solver-free, the advantages of these schemes compared to other TVD schemes such as Harten's are: no complete set of eigenvectors is needed and hence weakly hyperbolic system can be solved, faster and programming is much simpler. The numerical solutions obtained in computation Riemann problem are satisfactory.

Key words] conservation laws; MmB; flux; convergence; staggered grids