

[文章编号] 1001-246X(2001)04-0381-04

加权 ENO 格式的构造及数值模拟

王春武, 邱建贤, 戴嘉尊

(南京航空航天大学理学院, 江苏 南京 210016)

[摘 要] 将加权 ENO 格式推广到非结构三角形网格上, 构造了一类加权 ENO 有限体积格式, 提出的插值多项式的构造方式, 可以减少计算时间. 对于出现的病态方程组, 给出了解决方法. 此外还给出了插值点的选取方式及加权因子的构造方法. 结合三阶 TVD Runge-Kutta 时间离散, 对二维欧拉方程组进行了数值试验.

[关键词] 加权 ENO 格式; 非结构网格; 有限体积格式

[中图分类号] O241.3 [文献标识码] A

0 引言

自从八十年代初期, Harten A 提出了 TVD (Total Variation Diminishing) 格式的概念后, 双曲型守恒律方程数值方法的研究取得了迅速发展, 它可以有效地处理间断, 使之不产生新的极值点, 保持解的单调性, 代表性的工作主要有文[1~3]; 但由于其保持解的总变差不变, 所以使格式在局部极值点处降为一阶精度, 为了克服 TVD 格式的这一缺陷, 便出现了 ENO (Essentially Nonoscillatory) 格式.

ENO 格式放宽了 TVD 格式对总变差不能增长的限制, 允许总变差有微小的增量. 其主要思想是根据周围点的信息, 构造多个插值多项式, 再利用自适应技术选取“最光滑”的一个, 得到网格边界上的值. 在此基础上, 为了能更充分地利用周围点的信息, Liu X D^[4]等提出了加权 ENO 格式, 即在可供选择的多个插值多项式中, 不是选择其中一个, 而是将所有多项式进行一次凸组合, 选择适当的加权因子, 使得在光滑区域所得到的多项式的贡献最多, 这样就可以保证将数值解的振荡减少到最小.

多维问题中有关 ENO 格式的研究不多, 用非结构网格的就更少, 其中 Abgrall R^[5]构造了一类二维情形的非结构网格 ENO 格式, 并给出加权因子的构造方法. 但由于在构造插值多项式时, 每一个时间步的每一个网格点上都需要解一个方程组, 且随着精度的提高, 方程组的阶也会相应提高, 再加上非结构网格本身数据结构的复杂性, 计算量会变得很大, 同

时由于病态方程组的出现, 得到不准确解的机会也增大了. 本文由此思想出发, 利用插值多项式所要满足的条件, 一次性给出了它的系数. 为了方便处理, 时间离散用高阶 Runge-Kutta 方法; 对空间, 在每一个网格点构造一个插值多项式, 给出了加权因子的构造方法. 同时进行了数值试验, 结果表明方法是成功的.

1 基本公式及时间离散

考虑二维双曲型守恒律方程组

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F_1(U)}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2(U)}{\partial x_2} = 0, \quad (1)$$

其中

$$U = (u, \rho u, \rho v, E)^T,$$

$$F_1(U) = (\rho u, \rho u^2 + p, \rho uv, u(E + p))^T,$$

$$F_2(U) = (\rho v, \rho uv, \rho v^2 + p, v(E + p))^T,$$

$$p = (\gamma - 1)(E - 0.5\rho(u^2 + v^2)), \quad \gamma = 1.4.$$

包含网格点 l 的控制体为: 把以网格点 l 为顶点的三角形的质心与此三角形以 l 为端点的两个边线的中点连接起来, 得到多边形记为 Ω_l . 记 $F = (F_1(U), F_2(U))$, $x = (x_1, x_2)$, 对(1)式在 Ω_l 上积分, 并由 Green 公式得

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{\Omega_l} U dx \right) = - \sum_{k=1}^m \int_{\Gamma_k} F \cdot n_k ds, \quad (2)$$

其中 m 表示 Ω_l 总的边数, Γ_k 表示第 k 条边, n_k 为 Γ_k 的单位外法向, 记 $\langle U \rangle_{\Omega_l} = U_l = \frac{1}{|\Omega_l|} \int_{\Omega_l} U dx$

[收稿日期] 2000-01-18; [修回日期] 2000-05-31

[基金项目] 航空基础科学基金(96A52004)资助项目

[作者简介] 王春武(1972-), 男, 山东济南, 博士生, 从事流体力学数值方法方面的研究.

($|\Omega_l|$ 为多边形 Ω_l 的面积. 若要计算 $\frac{\partial}{\partial t} U_l$ 的值, 首先要计算 (2) 式右边的线积分, 利用 Gauss 积分公式, 可以得到

$$\int_{\Gamma_k} F n_k ds \approx |\Gamma_k| \sum_{q=1}^p \omega_q F(U(G_q, t)) n_k. \quad (3)$$

其中 $|\Gamma_k|$ 表示边 Γ_k 的长度, G_q 为 Gauss 点, 本文取 $p=2$.

选择 Roe 通量 $h(R_{lq}, R_{nq})$ 来逼近 $F(U(G_q, t)) n_k$, R_{lq} 为在控制体 Ω_l 上所构造的高阶插值多项式在 G_q 点处的值, R_{nq} 为与 Ω_l 共边的控制体上高阶插值多项式在点 G_q 处的值, 这样就得到了离散后的有限体积格式

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} U_l &= - \frac{1}{|\Omega_l|} \sum_{k=1}^m |\Gamma_k| \left(\sum_{q=1}^p \omega_q h(R_{lq}, R_{nq}) \right)_{\Gamma_k} \\ &\equiv L(U_l). \end{aligned} \quad (4)$$

为了方便处理, 时间方向采用 Shu^[3] 等提出的 TVD Runge-Kutta 方法, 三阶 TVD Runge-Kutta 计算公式如下

$$\begin{cases} U_l^{(0)} = U_l, \\ U_l^{(1)} = U_l^{(0)} + \Delta t L(U_l^{(0)}), \\ U_l^{(2)} = \frac{3}{4} U_l^{(0)} + \frac{1}{4} U_l^{(1)} + \frac{1}{4} \Delta t L(U_l^{(1)}), \\ U_l^{(\text{new})} = \frac{1}{3} U_l^{(0)} + \frac{2}{3} U_l^{(2)} + \frac{2}{3} \Delta t L(U_l^{(2)}). \end{cases} \quad (5)$$

2 加权插值多项式的构造

为了简单起见, 这里仅就二阶精度插值多项式给予详细介绍.

2.1 插值点的选取

构造控制体 1 上的 n 次插值多项式, 需要 $(n+1) \cdot (n+2)/2$ 个插值点. 这些点的选取, 一般采用下面 3 种方式(以构造二次多项式加以说明):

① 如图 1(a) 所示, 控制体 2, 3, 4, 5, 6 环绕控制体 1 且依次相邻.

② 图 1(b) 中控制体 2, 3, 4, 5 环绕控制体 1 且依次相邻, 6 则分别与 3, 4 相邻.

③ 图 1(c) 中控制体为 2, 3 相邻且分别与 1 同时相邻, 5 与 2, 3, 4, 6 相邻, 4 与 2, 6 与 3 则分别相邻.

对区域进行三角剖分时所得到的三角形大多接近正三角形, 因此计算网格多为六边形, 每种方式将有 6 种选择方法, 总的选择方法为 18 种.

2.2 插值多项式的构造

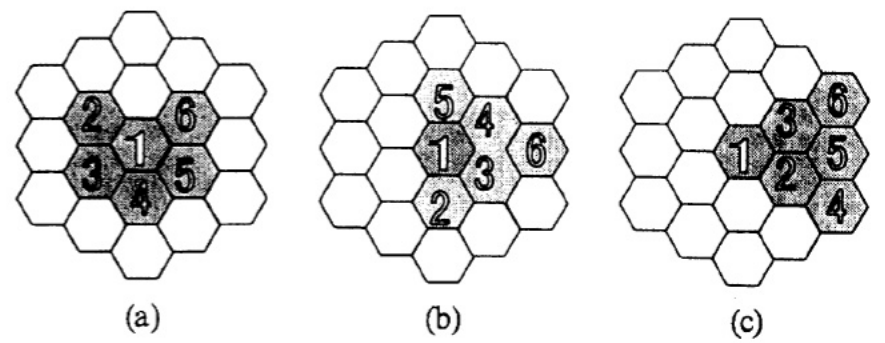


图 1 插值点的选取

Fig. 1 Selection of the interpolating points

设 $\Omega_i (i=1, 2, \dots, 6)$ 为已给定的一组控制体, 要构造控制体 Ω_l 上的插值多项式. 记 $\Omega_i (i=1, 2, \dots, 6)$ 上的网格平均值为 U_i , 那么可以得到

$$p_i(x, y) = a_{i1} + a_{i2} x + a_{i3} y + a_{i4} xy + a_{i5} x^2 + a_{i6} y^2, \quad (6)$$

使得

$$\langle p_i(x, y) \rangle_{\Omega_l} = \begin{cases} 1, & i = l \\ 0, & i \neq l \end{cases} \quad (i, l = 1, 2, \dots, 6). \quad (7)$$

令 $p(x, y) = \sum_{i=1}^6 p_i(x, y) U_i$, 则有

$$\langle p(x, y) \rangle_{\Omega_l} = U_l, \quad i = 1, 2, \dots, 6. \quad (8)$$

当 i 固定时, (7) 式实际上是一个方程组, 未知量为 $(a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, a_{i4}, a_{i5}, a_{i6})^T$, 系数矩阵为 $v = [\langle x^p y^q \rangle_{\Omega_l}]_{\substack{0 \leq p+q \leq 2 \\ 1 \leq i \leq 6}}$. 在计算中, 可以一次性计算得到 $p_i(x, y)$ 的系数, 不需要在每一个时间步的每一个点上解一个方程组, 从而可以节省计算时间.

在实际计算中, 由于受到流场内物体几何形状的影响, 有时会出现少数网格不规则, 发生严重扭曲, 从而使得 (7) 式所得到的方程组是病态的, 影响到计算结果. 对于病态方程组的判断, 本文采用下面方法, 设 λ_1 和 λ_2 分别为方程组系数矩阵中绝对值最大的和最小的特征值, 若

$$\frac{|\lambda_1|}{|\lambda_2|} \geq \omega, \quad \omega \text{ 为正常数,}$$

则认为此方程组为病态的, 本文取 $\omega=10^3$. 如果在某控制体上所得到的方程组为病态的, 可采用降低插值多项式次数的方法, 以避免它的出现. 由于相对总的控制体的个数来说, 得到病态方程组的控制体的个数非常少, 因而不会影响格式的精度.

2.3 加权因子的选取

在 ENO 格式中, 由于在每一个界面上的值是由自适应插值点得到的, 这样, 在附近许多其它点的信息就没有考虑. 为了使得到的插值更加准确, Liu X D^[4] 等提出了加权 ENO 格式, 即在可供选择的多项

式插值中,不是选择最光滑的一个,而是对所有多项式插值进行一次凸组合,选择适当的加权因子,使得在光滑区域加权因子较大,而在含有间断的区域加权因子较小.

在构造二次插值多项式 $p^{(k)}(x, y)$ ($k=1, 2, \dots, N$; N 为由图 1 可以得到的控制体的选择方法) 时,设所需要的 6 个控制体构成的连通区域分别为 S_k , 定义光滑因子 IS_k 为 S_k 内所有共边的控制体网格平均值之差的平方和, h 为所有控制体的最大直径,当解在 S_k 上光滑时, $IS_k = O(h^2)$; 当解在 S_k 上有间断时, $IS_k = O(1)$. 令

$$\alpha_k = \frac{1}{(\epsilon + IS_k)}, \quad \epsilon = 10^{-5},$$

$$\beta_k = \frac{\alpha_k}{\sum_{k=1}^N \alpha_k}, \quad k = 1, 2, \dots, N,$$
(9)

则 β_k 为所得到的加权因子. 当解在 S_k 上光滑时, $\beta_k = O(1)$; 当解在 S_k 上有间断时, $\beta_k \leq \max(O(\epsilon^2), O(h^4))$, 加权因子满足所要求的条件.

加权插值多项式可以表示为

$$p(x, y) = \sum_{k=1}^N \beta_k p^k(x, y),$$
(10)

用此多项式来逼近控制体边界上的流通量时,可以保证数值解基本不振荡.

3 数值试验

利用本文所构造的加权 ENO 有限体积方法,对二维双曲型守恒律方程组进行了数值试验,流场三角形剖分采用文[6]中方法,并对边界进行了处理,用给出的局部三角形网格和计算网格.

例 1. 单个 NACA0012 翼型跨音速绕流问题

取 $M_\infty = 0.8$, 迎角 $\alpha = 0^\circ$, 计算区域有 2 824 个网格点, 5 460 个三角形, 图 2、图 3 分别为局部三角形网格和计算网格, 图 4、图 5 分别为等马赫数线图和翼型表面压力系数分布图.

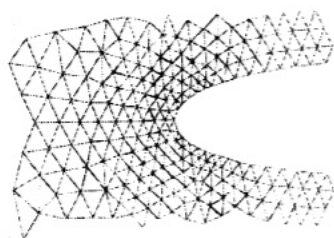


图 2 局部放大的三角形网格

Fig.2 The local enlarged triangle grids

例 2. 超音速圆柱绕流问题

取 $M_\infty = 2.0$, 迎角 $\alpha = 0^\circ$, 计算区域有 3 372 个网格点, 6 512 个三角形, 图 6 为等马赫数线图.

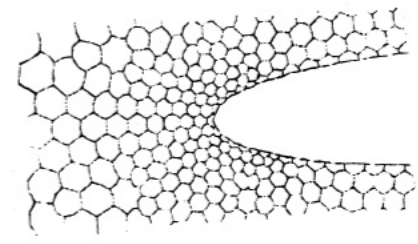


图 3 局部放大的计算网格

Fig.3 The local enlarged computational grids

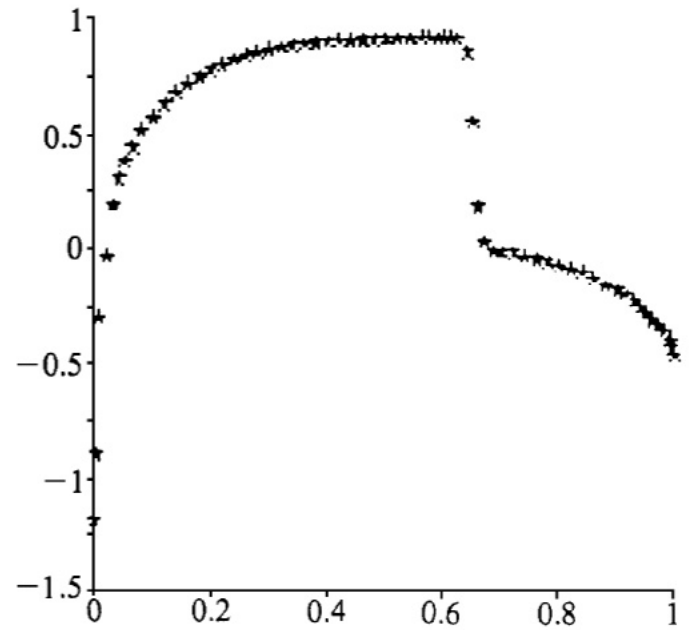


图 4 NACA0012 翼型表面压力分布

Fig.4 Pressure distribution on the surface for NACA0012 airfoil

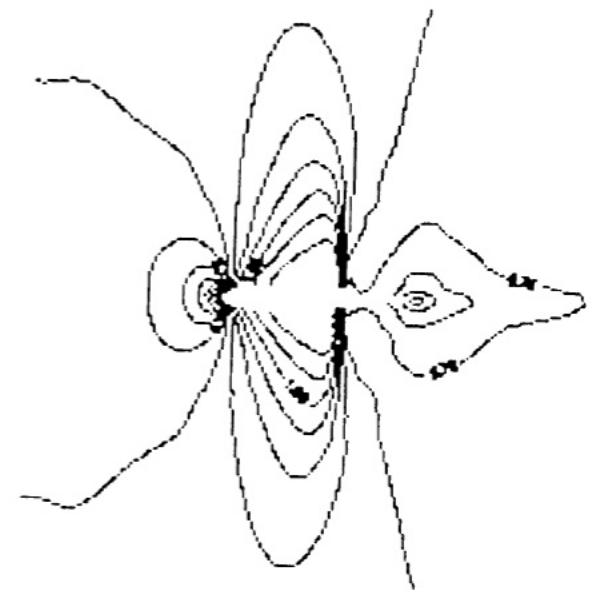


图 5 NACA0012 翼型等马赫数线

Fig.5 Mach contours for NACA0012 airfoil



图 6 等马赫数线

Fig.6 Mach contours

由计算结果可以看出, 本文所给出的 ENO 有限体积格式及处理方法是十分有效的, 能准确地捕捉

到激波,适合于亚、跨及超音速绕流问题的计算,可以解决具有复杂外形的物体绕流流场的数值模拟问题.

[参 考 文 献]

- [1] Harten A, Osher S. Uniformly high order accurate nonoscillatory schemes I [J]. SIAM J Num Anal, 1987, **24**: 279-309.
- [2] Harten A, Engquist B, Osher S, Chakravarthy R. Uniformly high order accurate nonoscillatory schemes III [J]. J Comp Phys, 1987, **71**: 231-303.
- [3] Shu C W, Osher S. Efficient implementation of essentially nonoscillatory shock capturing schemes [J]. J Comp Phy, 1988, **77**: 439-471.
- [4] Liu Xu-dong, Osher Stanley, Chan Tony. Weighted Essentially Nonoscillatory Schemes [J]. J Comp Phy, 1994, **115**: 200-212.
- [5] Abgrall R. On essentially non-oscillatory schemes on unstructured meshes: Analysis and implementation [J]. J Comp Phy, 1994, **114**: 45-58.
- [6] Weatherill N P. Delaunay triangulation in computational fluid dynamics [J]. Computers Math Applic, 1992, **24**: 129-150.

CONSTRUCTION AND NUMERICAL SIMULATION OF HIGH ACCURACY WEIGHTED ENO SCHEMES

WANG Chun-wu, QIU Jian-xian, DAI Jia-zun

(*Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, P R China*)

[**Abstract**] According to the ENO scheme on structured grids, a class of weighted ENO finite volume scheme on unstructured mesh is developed. On every control volume, it constructs a new weighted quadratic reconstruction polynomial which can save computational costs. It also uses a method which can resolve the overdetermined systems and do not affect the accuracy of the schemes. Besides, the selection of interpolation points and the construction of weight are presented, Third order TVD Runge-Kutta time discretization is used. In order to accelerate the convergence, local time step is introduced. The numerical experiments show the scheme effective.

[**Key words**] weighted ENO scheme; unstructured mesh; finite volume scheme