第 60 卷 第 3 期 厦门大学学报(自然科学版) Vol. 60 No. 3
2021 年 5 月 Journal of Xiamen University (Natural Science) May 2021
doi:10.6043/j.issn.0438-0479.202011006

厦门大学百年校庆专辑

间断 Galerkin 方法中的加权本质无振荡限制器述评

邱建贤[1*],朱　君[2]
(1.厦门大学数学科学学院,福建 厦门 361005;2.南京航空航天大学理学院,江苏 南京 211106)

摘要:间断 Galerkin (DG)有限元方法是当今求解可压缩双曲守恒律的一类重要的高精度数值方法,限制器是 DG 算法稳定的关键,用于控制 DG 格式在间断问题计算中产生的伪振荡进而保证格式的稳定性.针对以前存在的限制器不能保持格式精度、影响 DG 方法的空间紧致特性、多数不适用于多维或复杂网格体系等缺陷.本文综述了近十年来本课题组开展的一系列使用 DG 方法的高精度非线性限制器研究,具体包括三维非结构网格的高精度加权本质无振荡(WENO)限制器、Hermite WENO(HWENO)限制器、三角函数基空间的 WENO 限制器、简单紧凑型的 HWENO 限制器等.该系列 WENO 型限制器具有保持格式精度,不振荡,不含经验参数等优点,为 DG 方法限制器的研究开辟了一条新途径,进而丰富了该领域的基础算法研究,并具有大规模工程应用的前景.

关键词:间断 Galerkin 方法;加权本质无振荡方法;限制器

中图分类号:O 241　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:0438-0479(2021)03-0441-12

间断 Galerkin(DG)方法具有坚实的数学理论和实现方法,易于处理各类复杂区域和边界问题,可实现高效并行和各类网格,非常适合于计算流体力学(CFD)、计算气动声学、计算电磁学等相关工程问题的计算,DG 方法已成为目前 CFD 高精度数值方法的研究热点之一,也是下一代 CFD 解算器高精度仿真的首要选择.非线性双曲守恒律方程作为流体力学中的重要方程,即使初始值光滑,其解也可能产生间断,如激波等.而对于存在强间断解的数值模拟中,DG 方法容易产生较为明显的非物理振荡,进而产生非线性不稳定,导致数值解爆炸.所以对于此类问题往往需要使用非线性限制器来抑制非物理振荡,从而实现相关物理过程的准确、稳健的数值模拟.而常用的限制器(如:总变差减小(TVD)限制器、总变差有界(TVB)限制器等)虽然可以控制间断附近的伪振荡,但是它们不仅会过渡抹平激波(包含需要人为调整的参数),而且会降低 DG 方法的预期设计精度.另一方面,由于限制器的引入,修改了原 DG 的解,会造成解在局部不匹配,从而影响定常问题的收敛性.因此,近十年来,本课题组一直致力于 DG 紧致格式的高精度非线性限制器的研究,提出并发展了一系列兼具高精度、强稳健及紧致特性的限制器,在促进基础算法发展的同时已广泛应用于相应工程领域.

间断有限元方法最早由 Reed 等[1]为解决中子输运方程(线性双曲方程)而提出的,它的一个很重要的发展是 Cockburn 等[2-6]构建了发展型的非线性双曲守恒律的 Runge-Kutta DG(RKDG)方法.这种 DG 方法[7-13]属于线方法范畴,在时间离散系统中采用非线性稳定的高精度 Runge-Kutta 方法,在空间的离散系统中,DG 有限元方法,界面间的数值通量采用真正的或逼近的 Riemann 解,并且使用 TVB 的限制器,得到了即使在强激波情况下也无伪振荡的性质.此外,Dumbser 等[14-15]在每个时间步使用重构算子来增加高阶 DG 方法的数值精度和稳定性.文献[16-20]提出了拉格朗日 DG 方法.Tia 等[21]应用泰勒基构造了 DG 谱有限元方法.Hex 等[22]设计了一种新的加权 RKDG 方法用于求解三维声波和弹性波,并为解扩散方程提出了 rDG 方法[23-24].由于 DG 方法优越的计算性能,该方法也被广泛用于流体力学等科学计算领域[25-31],其他的高阶经典 DG 方法参见文献[32-34].

收稿日期:2020-11-03　**录用日期**:2021-02-23
基金项目:国家自然科学基金(12071392,11872210)
* **通信作者**:jxqiu@xmu.edu.cn
引文格式:邱建贤,朱君.间断 Galerkin 方法中的加权本质无振荡限制器述评[J].厦门大学学报(自然科学版),2021,60(3):441-452.
Citation:QIU J X,ZHU J.A brief survey on weighted essen-tially non-oscillatory limiters for discontinuous Galerkin methods [J].J Xiamen Univ Nat Sci,2021,60(3):441-452.(in Chinese)

由于有限元的特性,DG 方法和古典的有限差分和有限体积法相比有以下的优点:1) DG 精度的阶仅依赖于精确解. DG 的阶可通过适当选取逼近解的多项式的次数得到. 2) DG 方法具有高度的可并行性. 3) 单元划分及对边界处理的灵活性高,适合于处理复杂的区域的问题. 4) DG 方法易于进行自适应处理,自适应算法在具有间断的双曲问题的求解中非常重要. 目前,DG 方法已广泛应用流体动力学、湍流、天气预报、粒子流、海洋学、油气储藏模拟、浅水模型、多孔介质中流体输运、半导体的模拟、电磁场、图象处理等问题中,是目前 CFD 高精度数值方法的主流算法之一.

在 DG 方法的构造中,限制器是一个很重要的组成部分,它可以控制格式在间断问题(如激波)计算中产生伪振荡,且必须采用限制器,保证格式的稳定性. 通常限制器的过程可以分为两个部分:首先确定"坏单元"("Troubled-cell"),即解含有间断的单元,在该单元需要做限制过程;然后在"坏单元"中修正 DG 的多项式解,由于守恒的要求,需要保证单元平均值不变,同时保证与原 DG 的解具有相同的精度,且振荡减小.

在第一部分中,使用"坏单元"或称间断指示器,如基于最小模型指示器[4],基于力矩的指示器[35],以及改进的力矩指示器[36],基于 DG 超收敛性质的 KXRCF 指示器[37],基于 Harten 子单元分辨方法的指示器[38]等.

在第二部分中,包括经典的最小模型限制器[2-4,6],基于力矩的限制器[37],以及改进的力矩限制器[36]等. 这些限制器属于斜率型限制器的范畴,它们的优点是可以在强间断附近有效抑制伪振荡的出现,但付出的代价是在解的光滑极值点处有可能降低格式的数值精度. 另一种类型的限制器是基于本质无振荡(ENO)和加权 ENO (WENO)方法[39-46]的思想构造的,具有很强的激波穿透能力和保持格式的高精度. 这种类型的限制器通过将问题单元上的 DG 方法数值解的自由度进行重构,可以在解的光滑区域实现高精度并在强间断附近保持本质无振荡的性质. 这些高精度 WENO 限制器基本上均为根据有限体积 WENO 格式的构造方法设计的,随着 DG 方法格式精度的提高该限制器需要更宽的空间模板,有时会破坏原始 DG 方法本身具有的空间模板紧凑的性质. 此外,众多的 WENO 限制器[47-54],包括新型 WENO 限制器[51,55-57],自适应阶 WENO 限制器[58],中心型 WENO (CWENO)限制器[59],和 HermiteWENO(HWENO)限制器[48,50,60]等都是第二类型的限制器. 此外,由于 CWENO 格式[61-64]比经典的 WENO 格式[65-67]在数值计算上的代价更低,它们可以作为 DG 格式的后验子单元限制器[30].

基于上述研究,本课题组近十年来一直致力于 DG 方法的高精度 WENO 限制器的研究工作,提出并发展了一系列兼具高精度、强稳健及紧致特性的限制器,在促进基础算法发展的同时已广泛应用于相应工程领域. 主要包含如下工作:针对已有限制器不能保持 DG 方法高精度或需要选取参数的问题,结合 DG 方法和有限体积 WENO 格式的优良特性设计了 WENO 限制器,有效地解决了限制器中含有参数和在部分光滑区域中降低 DG 方法数值精度的问题,实现了对非线性双曲守恒律的数值模拟,并通过数值结果验证了该类 WENO 限制器的一致高精度、无振荡和高分辨率等特性,解决了经典 WENO 限制器的模板比 DG 方法模板更宽的问题;将 Hermite 插值理论用于限制器构造过程设计了 HWENO 限制器,有效地缓解了 WENO 限制器宽模板问题,进而更好地发挥 DG 方法的作用,实现了对结构网格和非结构网格上非线性双曲守恒律的数值模拟;为了更好地模拟具有高频振荡的物理问题,设计了一类基于三角基函数空间的 TWENO 格式,并将其发展为 DG 方法的限制器. 该限制器在相同条件下,能够更好地数值求解复杂波形或高频振荡问题;为了减少传统 WENO 限制器构造过程过于复杂繁琐以及解决宽模板问题,设计了一类紧凑简单的新型 HWENO 限制器,该限制器解决了经典 WENO 限制器的构造破坏了 DG 方法紧致性的弊端,且避免了线性权在复杂网格体系下的计算,从而大大提高了计算效率.

1 DG 方法简述

首先考虑一维标量守恒律方程

$$\begin{cases} u_t+f(u)x=0, \\ u(x,0)=u_0(x). \end{cases} \tag{1}$$

假设点 x_i 是单元 $I_i=[x_{i-\frac{1}{2}},x_{i+\frac{1}{2}}]$的中心. 为方便起见,定义单元长度为 $h=\Delta x_i=x_{i+\frac{1}{2}}-x_{i-\frac{1}{2}}$ 测试函数空间为 $V_h^k=\{p:p|_{I_i}\in P^k(I_i)\}$,其中 $P^k(I_i)$是单元 I_i 上所有不超过 k 次的代数多项式全体构成的线性空间. 采用 I_i 上的局部正交的代数多项式基函 $v_l^{(i)}(x)$,$l=0,1,\cdots,k$,

$$v_0^{(i)}(x)=1,v_1^{(i)}(x)=\frac{x-x_i}{\Delta x_i},v_2^{(i)}(x)=$$

$$\left(\frac{x-x_i}{\Delta x_i}\right)^2-\frac{1}{12},\cdots.$$

那么在空间 V_h^k 中的数值解 $u_h(x,t)$ 可以写成

$$u_h(x,t)=\sum_{l=0}^{k}u_i^{(l)}(t)v_l^{(i)}(x),x\in I_i,\qquad(2)$$

自由度 $u_i^{(l)}(t)$ 由下式定义

$$u_i^{(l)}(t)=\frac{1}{a_1}\int_{I_i}u_h(x,t)v_l^{(i)}(x)\mathrm{d}x,l=0,1,\cdots,k.\qquad(3)$$

因为基不是标准正交的,所以 $a_l=\int_{I_i}(v_l^{(i)}(x))^2\mathrm{d}x$. 为简单起见,在不引起混淆的情况下将变量中的 t 省略. 为了确定数值解,推导出自由度 $u_i^{(l)}$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_i^{(l)}=\frac{1}{a_l}(\int_{I_i}f(u_h(x,t))\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}v_l^{(i)}(x)\mathrm{d}x-\hat{f}(u_{i+1/2}^{-},u_{i+1/2}^{+})v_l^{(i)}(x_{i+1/2})+\hat{f}(u_{i-1/2}^{-},u_{i-1/2}^{+}v_l^{(i)}(x_{i-1/2})),l=0,1,\cdots,k.\qquad(4)$$

其中 $u_{i+1/2}^{\pm}=u_h(x_{i+1/2}^{\pm},t)$ 是单元界面 $x_{i+1/2}$ 处间断解 u_h 的左右极限,$\hat{f}(u^-,u^+)$ 是标量情况和方程组情况下精确或近似黎曼解的数值通量. 半离散格式(4)通过非线性稳定的 Runge-Kutta 时间离散方法进行时间离散化,例如三阶 TVD Runge-Kutta 时间离散方法[12-13,68-69]:

$$\begin{cases}u^{(1)}=u^n+\Delta tL(u^n),\\ u^{(2)}=\frac{3}{4}u^n+\frac{1}{4}u^{(1)}+\frac{1}{4}\Delta tL(u^{(1)}),\\ u^{n+1}=\frac{1}{3}u^n+\frac{2}{3}u^{(2)}+\frac{2}{3}\Delta tL(u^{(2)}).\end{cases}\qquad(5)$$

本课题组采用向前欧拉方法对式(4)进行时间离散作为例子来解释如何将非线性限制器应用于文献[51]所使用的 DG 方法. 从定义在时间层 n 上的数值解 $u_h^n\in V_h^k$ 出发(u_h^0 取为给定的初始条件通过 L^2 投影到 V_h^k 空间的初始数值解),在得到下一个时间层上的数值解之前需要对它进行限制并得到新值 $u_h^{n,\mathrm{new}}$. 在对所有的测试函数 $v(x)\in V_h^k$ 都成立的情况下,本课题组需要满足下式并得到 $u_h^{n+1}\in V_h^k$:

$$\int_{I_j}\frac{u_h^{n+1}-u_h^{n,\mathrm{new}}}{\Delta_t}v\mathrm{d}x-\int_{I_j}f(u_h^{n,\mathrm{new}})v_x\mathrm{d}x+\hat{f}_{j+\frac{1}{2}}^{n,\mathrm{new}}v(x_{j+\frac{1}{2}}^{-})-\hat{f}_{j-\frac{1}{2}}^{n,\mathrm{new}}v(x_{j-\frac{1}{2}}^{+})=0.\qquad(6)$$

2 高精度限制器

2.1 TVB 问题单元间断指示器[4]

定义

$$u_{i+1/2}^{-}=u_i^{(0)}+\tilde{u}_i,u_{i-1/2}^{+}=u_i^{(0)}-\tilde{\tilde{u}}_i.$$

从式(2)可以看出

$$\tilde{u}_i=\sum_{l=1}^{k}u_i^{(l)}v^{(i)}{}_l(x_{i+1/2}),\tilde{\tilde{u}}=-\sum_{l=1}^{k}u_i^lv_l^{(i)}(x_{i-1/2}).$$

这是修改的标准 minmod 限制器[70]

$$\tilde{u}_i^{\mathrm{mod}}=m(\tilde{u}_i,\Delta_+u_i^{(0)},\Delta_-u_i^{(0)}),$$
$$\tilde{\tilde{u}}_i^{(\mathrm{mod})}=m(\tilde{\tilde{u}}_i,\Delta_+u_i^{(0)},\Delta_-u_i^{(0)}).$$

其中 m 定义为

$$m(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\begin{cases}s\cdot\min_{1\leqslant j\leqslant n}|a_j|, & \mathrm{sign}(a_1)=\mathrm{sign}(a_2)=\cdots=\mathrm{sign}(a_n)=s,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}\qquad(7)$$

或者定义为 TVB 修正的 minmod 函数[71]

$$\tilde{m}(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\begin{cases}a_1, & |a_1|\leqslant Mh^2,\\ m(a_1,a_2,\cdots,a_n), & \text{其他}.\end{cases}\qquad(8)$$

使用上述 TVB 问题单元指示器识别问题单元. 其中 $M>0$ 是常数且 M 的选择取决于问题的解. 对于标量情形,可以通过文献[4]中的初始条件估计 M(M 与初始条件在光滑极值处的二阶导数的绝对值成正比);然而,在方程组情形下较难估计 M. 如果 M 选择得太小,DG 方法的数值精度可能在解的光滑极值点处降低;如果 M 选择得太大,DG 方法会在解的非光滑区域产生伪振荡. 由于下面介绍的高精度 WENO 限制器可以在问题单元上对 DG 方法数值解中的自由度进行重构时保证格式的高阶精度不被破坏,所以是否选择一个精确的 M 就显得不太重要.

2.2 KXRCF 间断指示器[39]

KXRCF 间断指示器由 Krivodonova 等[37]基于 DG 有限元方法的超收敛性质构造的一类激波探测技术. 利用 DG 有限元方法求解双曲守恒律时,其光滑区域中每个单元的出流边界处 DG 的解具有强超收敛性质,因此,当强超收敛性质在某单元被破坏时,解在该单元可被视为间断,该单元被识别为问题单元. KXRCF 间断指示器具体描述为:将单元 I_i 的边界划分为入流 ∂I_i^- 与出流 ∂I_i^+ 两个边界部分,∂I_i^- 和 ∂I_i^+. 在入流边界 ∂I_i^- 处 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}<0$,而在出流边界 ∂I_i^+ 处 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}>0$,其中 $\boldsymbol{v}$ 是流体的速度,$\boldsymbol{n}$ 是单元边界的外法线. KXRCF 间断指示器[37]定义为

$$\mathcal{I}_i=\frac{\left|\int_{\partial I_i^-}(u^h\mid I_i-u^h\mid I_{n_i})\mathrm{d}s\right|}{h^{(k+1)/2}\mid\partial I_i^-\mid\ \|u^h\mid I_i\|},\qquad(9)$$

其中,h 是单元 I_i 的半径,I_{n_i} 是 I_i 关于边界 ∂I_i^- 的邻居单元,范数为 L^∞ 范数.

当 $\mathcal{I}_i>1$ 时,单元 I_i 被识别为问题单元.

2.3 WENO 限制器

采用 TVB 问题单元指示器、KXRCF 间断指示器

或其他问题单元指示器找到问题单元后，利用其和相邻单元上物理量的单元平均值构造 WENO 型重构多项式，在保持问题单元上物理量的单元平均值不变的前提下对问题单元上 DG 方法数值解的自由度进行重构(以一维情况为例，在问题单元 I_i 上重新构造自由度 $u_i^{(l)}$，$l=1,2,\cdots,k$，仅保留单元平均值 $u_i^{(0)}$ 不变).

2.3.1 重构步骤 1

在高斯或高斯-洛巴托积分点上重构 u 的点值. 对于 P^k 的 DG 方法($k+1$ 阶精度)，需要使用至少达到 $2k+2$ 阶精度的高斯或高斯-洛巴托求积公式，WENO 重构的数值精度至少必须达到 $2k+1$ 阶. 为此，本课题组需要用 $2k+1$ 个相邻单元 $I_{i-k},\cdots,I_{i+k}$ 的单元平均值构造多项式并在高斯或高斯-洛巴托求积节点上得到 u 的高阶逼近值. 然后执行如下重构步骤[41-42,72]：

1) 取 $k+1$ 个小模板 S_j，$j=0,1,\cdots,k$，使得 I_i 属于其中每个小模版. 设 $S_j=\bigcup_{l=0}^{k} I_{i+j-l}$，用 $\mathcal{T}=\bigcup_{j=0}^{k} S_j$ 表示包含 $k+1$ 个小模板的所有单元的大模板. $p_j(x)$ 表示定义在模板 S_j，$j=0,1,\cdots,k$ 上的 k 次重构多项式，满足条件 $\frac{1}{\Delta x_{i+j-l}}\int_{I_{i+j-l}} p_j(x)\mathrm{d}x = u_{i+j-l}^{(0)}$，$l=0,1,\cdots,k$. $Q(x)$表示定义在大模板 $\mathcal{T}$ 上的 $2k$ 次多项式，满足条件 $\frac{1}{\Delta x_{i+l}}\int_{I_{i+l}} Q(x)\mathrm{d}x = u_{i+l}^{(0)}$，$l=-k,\cdots,k$. $p_j(x)$ 和 $Q(x)$的构造细节参见文献[45].

2) 计算线性权 $\gamma_0,\cdots,\gamma_k$. 在不同的高斯或高斯-洛巴托求积节点 x_G 上满足

$$Q(x_G)=\sum_{j=0}^{k}\gamma_j p_j(x_G).$$

在不同的求积节点需要计算出一组不同的线性权. 函数 $Q(x)$和 $p_j(x)$，$j=0,1,\cdots,k$，在求积节点 x_G 的值可以写成单元平均值 $u_i^{(0)}$ 的线性组合. 例如 $k=2$ 时，在单元边界 $x_G=x_{i+1/2}$有

$$p_0(x_G)=\frac{1}{3}u_{i-2}^{(0)}-\frac{7}{6}u_{i-1}^{(0)}+\frac{11}{6}u_i^{(0)},$$

$$p_1(x_G)=-\frac{1}{6}u_{i-1}^{(0)}+\frac{5}{6}u_i^{(0)}+\frac{1}{3}u_{i+1}^{(0)},$$

$$p_2(x_G)=\frac{1}{3}u_i^{(0)}+\frac{5}{6}u_{i+1}^{(0)}-\frac{1}{6}u_{i+2}^{(0)},$$

$$Q(x_G)=\frac{1}{30}u_{i-2}^{(0)}-\frac{13}{60}u_{i-1}^{(0)}+\frac{47}{60}u_i^{(0)}-\frac{1}{20}u_{i+2}^{(0)}.$$

对应的一组线性权为

$$\gamma_0=\frac{1}{10},\gamma_1=\frac{6}{10},\gamma_2=\frac{3}{10}.$$

在点 $x_G=x_{i+\sqrt{5}/10}$，有

$$p_0(x_G)=\left(-\frac{1}{60}+\frac{\sqrt{5}}{20}\right)u_{i-2}^{(0)}+\left(\frac{1}{30}-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)u_{i-1}^{(0)}+\left(\frac{59}{60}+\frac{3\sqrt{5}}{20}\right)u_i^{(0)},$$

$$p_1(x_G)=\left(-\frac{1}{60}-\frac{\sqrt{5}}{20}\right)u_{i-1}^{(0)}+\frac{31}{30}u_i^{(0)}+\left(-\frac{1}{60}+\frac{\sqrt{5}}{20}\right)u_{i+1}^{(0)},$$

$$p_2(x_G)=\left(\frac{59}{60}-\frac{3\sqrt{5}}{20}\right)u_i^{(0)}+\left(\frac{1}{30}+\frac{\sqrt{5}}{5}\right)u_{i+1}^{(0)}+\left(-\frac{1}{60}-\frac{\sqrt{5}}{20}\right)u_{i+2}^{(0)},$$

$$Q(x_G)=\frac{1+6\sqrt{5}}{600}u_{i-2}^{(0)}-\frac{7+21\sqrt{5}}{300}u_{i-1}^{(0)}+\frac{313}{300}u_i^{(0)}+\frac{-7+21\sqrt{5}}{300}u_{i+1}^{(0)}+\frac{1-6\sqrt{5}}{600}u_{i+2}^{(0)}.$$

对应的一组线性权为：

$$\gamma_0=\frac{91+9\sqrt{5}}{440},\gamma_1=\frac{129}{220},\gamma_2=\frac{91-9\sqrt{5}}{440}.$$

3) 计算光滑指示器 β_j，用于衡量问题单元 I_i 中代数多项式 $p_j(x)$的光滑程度. 光滑指示器 β_j 越小，问题单元中的代数多项式 $p_j(x)$越光滑[41,72]：

$$\beta_j=\sum_{l=1}^{k}\int_{I_i}\Delta x_i^{2l-1}\left(\frac{\partial^l}{\partial x^l}p_j(x)\right)^2\mathrm{d}x. \tag{10}$$

光滑指示器 β_j 常被写成 u 的单元平均值的二次方形式，详情参见[41,43,72].

4) 根据光滑指示器计算非线性权

$$\omega_j=\frac{\bar{\omega}_j}{\sum_j\bar{\omega}_j},\bar{\omega}_j=\frac{\gamma_j}{(\varepsilon+\beta_j)^2}. \tag{11}$$

其中 γ_j 是上述步骤 2)中确定的线性权，ε 取一个避免分母为零的小正数. 最终的近似值为

$$u_G\approx\sum_{j=0}^{k}\omega_j p_j(x_G). \tag{12}$$

2.3.2 重构步骤 2

基于 2.3.1 重构的点值 $u(x_G)$和数值积分获得自由度的重构值.

$$u_i^{(l)}=\frac{\Delta x_i}{a_l}\sum_G w_G u(x_G)v_l^{(i)}(x_G),l=1,2,\cdots,k.$$

其中 w_G是求积节点 x_G的求积系数. 问题单元 I_i 中的多项式是通过式(2)结合这些重构的自由度 $u_i^{(l)}$，$l=1,2,\cdots,k$ 和单元平均值 $u_i^{(0)}$ 得到的.

对于方程组情形，WENO 限制器总是与局部特征分解一起使用，详情参见文献[43]. 三角形和四面体网格上使用 DG 方法结合 WENO 限制器求解双曲守恒律方程组的详细过程如下[57,73]：首先在非结构网格上使用 TVB 问题单元指示器识别出问题单元，通过使用相邻三角形(四面体)的单元平均值进行 WENO

重构，在保持问题单元上物理量的单元平均值不变的情况下得到重构多项式并对其上 DG 方法数值解的自由度进行修正.

2.4 HWENO 限制器

在本小节中，本课题组将 HWENO 重构过程应用于 2.3.2 节. 该重构过程的优点是可在保持 DG 方法相同数值精度的同时有效减少所用空间模板的个数和降低模板的空间尺度，使之具有更好的空间紧凑性. 在此，基于一维标量守恒律方程(1)来介绍三阶精度($k=2$)HWENO 限制器的构造情况[73].

HWENO 限制器重构问题单元的自由度和 $u_i^{(1)}$ 和 $u_i^{(2)}$ 的过程：

2.4.1 $u_i^{(1)}$ 的重构过程

1) 给定小模版 $S_0=\{I_{i-1},I_i\}$，$S_1=\{I_i,I_{i+1}\}$，$S_2=\{I_{i-1},I_i,I_{i+1}\}$ 和大模板 $T=\{S_0,S_1\}$，构造 Hermite 二次重构多项式 $p_0(x)$，$p_1(x)$，$p_2(x)$和四次重构多项式 $q(x)$：

$$\int_{I_{i+j}} p_0(x)\mathrm{d}x = u_{i+j}^{(0)}a_0,\ j=-1,0,$$
$$\int_{I_{i-1}} p_0(x)v_1^{(i-1)}(x)\mathrm{d}x = u_{i-1}^{(1)}a_1,$$
$$\int_{I_{i+j}} p_1(x)\mathrm{d}x = u_{i+j}^{(0)}a_0,\ j=0,1,$$
$$\int_{I_{i+1}} p_1(x)v_1^{(i+1)}(x)\mathrm{d}x = u_{i+1}^{(1)}a_1,$$
$$\int_{I_{i+j}} p_2(x)\mathrm{d}x = u_{i+j}^{(0)}a_0,\ j=-1,0,1,$$
$$\int_{I_{i+j}} q(x)\mathrm{d}x = u_{i+j}^{(0)}a_0,\ j=-1,0,1,$$
$$\int_{I_{i+j}} q(x)v_1^{(i+j)}(x)\mathrm{d}x = u_{i+j}^{(1)}a_1,\ j=-1,1.$$

得到：

$$\int_{I_i} p_0(x)v_1^{(i)}(x)\mathrm{d}x = a_1(-2u_{i-1}^{(0)}+2u_i^{(0)}-u_{i-1}^{(1)}),$$
$$\int_{I_i} p_1(x)v_1^{(i)}(x)\mathrm{d}x = a_1(-2u_i^{(0)}+2u_{i+1}^{(0)}-u_{i+1}^{(1)}),$$
$$\int_{I_i} p_2(x)v_1^{(i)}(x)\mathrm{d}x = a_1(-u_{i-1}^{(0)}+u_{i+1}^{(0)})/2,$$
$$\int_{I_i} q(x)v_1^{(i)}(x)\mathrm{d}x = a_1\Big(\frac{15}{19}(u_{i-1}^{(0)}-u_{i+1}^{(0)})-\frac{11}{38}(u_{i-1}^{(1)}+u_{i+1}^{(1)})\Big).$$

2) 计算线性权 γ_0，γ_1 和 γ_2. 由

$$\int_{I_i} q(x)v_1^{(i)}(x)\mathrm{d}x = \sum_{j=0}^{2}\gamma_j\int_{I_i} p_j(x)v_1^{(i)}(x)\mathrm{d}x,$$

得到

$$\gamma_0=\frac{11}{38},\gamma_1=\frac{11}{38},\gamma_2=\frac{8}{19}.$$

3) 根据式(10)计算光滑指示器 β_j，然后根据式(11)计算非线性权. 重构多项式的第一个自由度为

$$u_i^{(l)}=\frac{1}{a_l}\sum_{j=0}^{2}w_j\int_{I_i} p_j(x)v_1^{(i)}(x)\mathrm{d}x. \tag{13}$$

2.4.2 $u_i^{(2)}$ 的重构过程

当需要第一个自由度 $u_i^{(1)}$ 时，使用 2.4.1 重构的值.

1) 给定小模版 $S_0=\{I_{i-1},I_i\}$，$S_1=\{I_i,I_{i+1}\}$，$S_2=\{I_{i-1},I_i,I_{i+1}\}$ 和大模板 $T=\{S_0,S_1\}$，构造 Hermite 三次重构多项式 $p_0(x)$，$p_1(x)$，$p_2(x)$和五次重构多项式 $q(x)$：

$$\int_{I_{i+j}} p_0(x)\mathrm{d}x = u_{i+j}^{(0)}a_0,$$
$$\int_{I_{i+j}} p_0(x)v_1^{(i+j)}(x)\mathrm{d}x = u_{i+j}^{(1)}a_1,\ j=-1,0,$$
$$\int_{I_{i+j}} p_1(x)\mathrm{d}x = u_{i+j}^{(0)}a_0,$$
$$\int_{I_{i+j}} p_1(x)v_1^{(i+j)}(x)\mathrm{d}x = u_{i+j}^{(1)}a_1,\ j=0,1,$$
$$\int_{I_{i+j}} p_2(x)\mathrm{d}x = u_{i+j}^{(0)}a_0,\ j=-1,0,1,$$
$$\int_{I_i} p_2(x)v_1^{(i)}(x)\mathrm{d}x = u_i^{(1)}a_1,$$
$$\int_{I_{i+j}} q(x)\mathrm{d}x = u_{i+j}^{(0)}a_0,$$
$$\int_{I_{i+j}} q(x)v_1^{(i+j)}(x)\mathrm{d}x = u_{i+j}^{(1)}a_1,\ j=-1,0,1,$$

得到：

$$\int_{I_i} p_0(x)v_2^{(i)}(x)\mathrm{d}x = a_2\Big(\frac{15}{4}u_{i-1}^{(0)}-\frac{15}{4}u_i^{(0)}+\frac{11}{8}u_{i-1}^{(1)}+\frac{19}{8}u_i^{(1)}\Big),$$
$$\int_{I_i} p_1(x)v_2^{(i)}(x)\mathrm{d}x = a_2\Big(-\frac{15}{4}u_i^{(0)}+\frac{15}{4}u_{i+1}^{(0)}-\frac{19}{8}u_i^{(1)}-\frac{11}{8}u_{i+1}^{(1)}\Big),$$
$$\int_{I_i} p_2(x)v_2^{(i)}(x)\mathrm{d}x = a_2\Big(\frac{1}{2}u_{i-1}^{(0)}-u_i^{(0)}+\frac{1}{2}u_{i+1}^{(0)}\Big),$$
$$\int_{I_i} q(x)v_2^{(i)}(x)\mathrm{d}x = a_2\Big(\frac{73}{56}u_{i-1}^{(0)}-\frac{73}{28}u_i^{(0)}+\frac{73}{56}u_{i+1}^{(0)}+\frac{45}{112}u_{i-1}^{(1)}-\frac{45}{112}u_{i+1}^{(1)}\Big).$$

2) 计算线性权 γ_0，γ_1 和 γ_2：

$$\int_{I_i} q(x)v_2^{(i)}(x)\mathrm{d}x = \sum_{j=0}^{2}\gamma_j\int_{I_i} p_j(x)v_2^{(i)}(x)\mathrm{d}x,$$

得到

$$\gamma_0=\frac{45}{154},\gamma_1=\frac{45}{154},\gamma_2=\frac{32}{77}.$$

3) 根据式(10)计算光滑指示器 β_j，然后根据式(11)计算非线性权. 重构多项式的第二个自由度为

$$u_i^{(2)} = \frac{1}{a_2}\sum_{j=0}^{2}\omega_j\int_{I_i} p_j(x)v_2^{(i)}(x)\mathrm{d}x. \tag{14}$$

本小节只考虑了一维 HWENO 限制器的构造流程,该限制器可以推广到多维情形. 文献[74]详细地介绍了使用 DG 方法结合 HWENO 限制器在非结构网格上求解三维非线性双曲守恒律方程组. 同样该文首先在三维四面体网格上使用 TVB 问题单元指示器找出问题单元,然后通过使用相邻四面体的单元平均值或导数平均值,在保持问题单元上物理量的单元平均值不变的情况下进行 HWENO 重构,得到问题单元内的多项式并对其上 DG 方法数值解的自由度进行修正.

2.5 TWENO 限制器

本小节仍从一维双曲守恒律方程组(1)开始. 主要介绍一类有限体积三角函数加权本质无振荡(TWEO)格式作为基于三角函数多项式空间的 DG 方法的限制器用于求解双曲守恒律和高频振荡问题. 本课题组为方便起见,假设网格均匀分布. DG 方法以及测试函数空间均是定义在单元 I_i 上最多 k 次的三角函数多项式空间 $V_h^k=\{p:p\mid I_i\in T^k(I_i)\}$. 在 I_i 上采用局部正交基 $\{v_l^{(i)}(x),l=0,1,\cdots,k\}$:

$$v_0^{(i)}(x)=1,$$
$$v_1^{(i)}(x)=\sin(\alpha(x-x_i)),$$
$$v_2^{(i)}(x)=\cos(\alpha(x-x_i))-\frac{\sin(h\alpha/2)}{h\alpha/2},$$
$$\cdots\cdots$$

其中 α 是可调参数. 可以在该三角函数多项式空间 V_h^k 上构造数值解 $u_h(x,t)$ 及自由度 $u_i^{(l)}(t)$ 等信息,详细过程参见文献[74]. 以 $k=2$ 为例,使用高斯-洛巴托积分点 x_G: $x_{i-1/2}$, $x_{i-\sqrt{5}/10}$, $x_{i+\sqrt{5}/10}$ 和 $x_{i+1/2}$. 具体重构过程如下:

1) 选择大模板 $\Gamma=\{I_{i-2},\cdots,I_{i+2}\}$ 并构造一个四次三角函数多项式 $q(x)\in\mathrm{span}\Big\{1,\sin(\alpha(x-x_i)),\cos(\alpha(x-x_i))-\frac{\sin(h\alpha/2)}{h\alpha/2},\sin((\alpha+1)(x-x_i)),\cos((\alpha+1)(x-x_i))-\frac{\sin(h(\alpha+1)/2)}{h(\alpha+1)/2}\Big\}$:

$$\frac{1}{h}\int_{I_{i+j}} q(x)\mathrm{d}x=u_{i+j}^{(0)},j=-2,\cdots,2.$$

然后,本课题组将大模板 Γ 分成 3 个小模板:$S_1=\{I_{i-2},I_{i-1},I_i\}$, $S_2=\{I_{i-1},I_i,I_{i+1}\}$, $S_3=\{I_i,I_{i+1},I_{i+2}\}$,并构造三角函数多项式 $p_n(x)\in\mathrm{span}\Big\{1,\sin(\alpha(x-x_i)),\cos(\alpha(x-x_i))-\frac{\sin h\alpha/2}{h\alpha/2}\Big\}$:

$$\frac{1}{h}\int_{I_{i+j+n-1}} p_n(x)\mathrm{d}x=u_{i+j+n-1}^{(0)},j=-2,-1,0. \tag{15}$$

下面,为简单起见,令 $u_i=u_i^{(0)}$. 问题单元 I_i 的端点 $x_{i+1/2}$ 和 $x_{i-1/2}$ 处的三角函数多项式 $p_n(x)$ 的值可以写成 $\{u_i\}$ 的线性组合:

$$\begin{aligned}
p_1(x_{i+1/2})&=\chi\Big((u_{i-1}-u_{i-2})\cos(h\alpha)+(u_{i-1}-u_i)\cos(2h\alpha)+(u_{i-2}+u_i)\frac{\sin(h\alpha)}{h\alpha}-u_{i-1}\frac{\sin(2h\alpha)}{h\alpha}\Big),\\
p_2(x_{i+1/2})&=-\chi\Big(u_{i-1}-u_i-(u_i-u_{i+1})\cos(h\alpha)-(u_{i-1}+u_{i+1})\frac{\sin(h\alpha)}{h\alpha}+u_i\frac{\sin(2h\alpha)}{h\alpha}\Big),\\
p_3(x_{i+1/2})&=\chi\Big(u_{i+1}-u_{i+2}-(u_i-u_{i+1})\cos(h\alpha)+(u_i+u_{i+2})\frac{\sin(h\alpha)}{h\alpha}-u_{i+1}\frac{\sin(2h\alpha)}{h\alpha}\Big),
\end{aligned} \tag{16}$$

和

$$\begin{aligned}
p_1(x_{i-1/2})&=\chi\Big(u_{i-1}-u_{i-2}+(u_{i-1}-u_i)\cos(h\alpha)+(u_{i-2}+u_i)\frac{\sin(h\alpha)}{h\alpha}-u_{i-1}\frac{\sin(2h\alpha)}{h\alpha}\Big),\\
p_2(x_{i-1/2})&=\chi\Big(u_i-u_{i+1}-(u_{i-1}-u_i)\cos(h\alpha)+(u_{i-1}+u_{i+1})\frac{\sin(h\alpha)}{h\alpha}-u_i\frac{\sin(2h\alpha)}{h\alpha}\Big),\\
p_3(x_{i-1/2})&=\chi\Big((u_{i+1}-u_{i+2})\cos(h\alpha)-(u_i-u_{i+1})\cos(2h\alpha)+(u_i+u_{i+2})\frac{\sin(h\alpha)}{h\alpha}-u_{i+1}\frac{\sin(2h\alpha)}{h\alpha}\Big),
\end{aligned} \tag{17}$$

其中 $\chi=\dfrac{h\alpha}{8\sin(h\alpha/2)^3\cos(h\alpha/2)}$.

2) 计算线性权,使得 $q(x_{i+1/2})=\sum_{n=1}^{3}\gamma_n p_n(x_{i+1/2})$:

$$\begin{aligned}
\gamma_1=&(\cos(h(-1+\alpha))-\cos(h(2+\alpha))+\cos(h(2+3\alpha))-\cos(h+3h\alpha\alpha)+4h\sin(h\alpha)+4h\alpha\sin(h\alpha)-2h\sin(2h\alpha)-2h\alpha\sin(2h\alpha)-\\
&4h\alpha\sin(h(1+\alpha))+2h\alpha\sin(2h(1+\alpha)))/(\chi(h\alpha\cos(h\alpha)-\sin(h\alpha))),\\
\gamma_2=&1-\gamma_1-\gamma_3,\\
\gamma_3=&((-\cos(h(-1+\alpha))+\cos(h(2+\alpha))-\cos(h(2+3\alpha))+\cos(h+3h\alpha)+2h\sin(h)+4h\alpha\sin(h)+h\sin(h(-1+\alpha))+h\alpha\sin(h(-1+\\
&\alpha))-h\alpha\sin(h(2+\alpha))-h\alpha\sin(h(2+3\alpha))-2h\sin(h+2h\alpha)+h\sin(h+3h\alpha)+h\alpha\sin(h+3h\alpha))/(\chi(-h\alpha\cos(h\alpha)+\sin(h\alpha))),
\end{aligned}$$

其中 $\chi = 32\sin((h(1+\alpha))/2)^3\cos((h(1+\alpha))/2)(-\cos(h\alpha)+\cos(h(1+\alpha)))$.

对于 $q(x_{i-1/2}) = \sum_{n=1}^{3}\gamma_n p_n(x_{i-1/2})$，有

$$\begin{aligned}
\gamma_1 = {} & (-\cos(h(-1+\alpha))+\cos(h(2+\alpha))-\\
& \cos(h(2+3\alpha))+\cos(h+3h\alpha)+2h\sin(h)+\\
& 4h\alpha\sin(h)+h\sin(h(-1+\alpha))+h\alpha\sin(h(-1+\\
& \alpha))-h\alpha\sin(h(2+\alpha))-h\alpha\sin(h(2+3\alpha))-\\
& 2h\sin(h+2h\alpha)+h\sin(h+3h\alpha)+h\alpha\sin(h+\\
& 3h\alpha))/(\chi(-h\alpha\cos(h\alpha)+\sin(h\alpha))),
\end{aligned}$$

$$\gamma_2 = 1-\gamma_1-\gamma_3,$$

$$\begin{aligned}
\gamma_3 = {} & (\cos(h(-1+\alpha))-\cos(h(2+\alpha))+\\
& \cos(h(2+3\alpha))-\cos(h+3h\alpha)+4h\sin(h\alpha)+\\
& 4h\alpha\sin(h\alpha)-2h\sin(2h\alpha)-2h\alpha\sin(2h\alpha)-\\
& 4h\alpha\sin(h(1+\alpha))+2h\alpha\sin(2h(1+\alpha)))/\\
& (\chi(h\alpha\cos(h\alpha)-\sin(h\alpha))),
\end{aligned}$$

其中 χ 同上.

3）根据式(10)计算光滑指示器：

$$\begin{aligned}
\beta_1 = {} & \chi(2h\alpha(2u_{i-1}^2+u_{i-2}^2+u_i^2-2u_{i-1}(u_{i-2}+u_i))+\\
& 4h\alpha(u_{i-1}-u_{i-2})(u_{i-1}-u_i)\cos(h\alpha)+2(u_{i-1}-\\
& u_{i-2})(u_{i-1}-u_i)\sin(h\alpha)-(u_{i-2}-u_i)(-2u_{i-1}+\\
& u_{i-2}+u_i)\sin(2h\alpha)-2(u_{i-1}-u_{i-2})(u_{i-1}-\\
& u_i)\sin(3h\alpha)-(u_{i-1}-u_i)^2\sin(4h\alpha)+\\
& h^2\alpha^2(2h\alpha(2u_{i-1}^2+u_{i-2}^2+u_i^2-2u_{i-1}(u_{i-2}+u_i))+\\
& 4h\alpha(u_{i-1}-u_{i-2})(u_{i-1}-u_i)\cos(h\alpha)-2(u_{i-1}-\\
& u_{i-2})(u_{i-1}-u_i)\sin(h\alpha)+(u_{i-2}-u_i)(-2u_{i-1}+\\
& u_{i-2}+u_i)\sin(2h\alpha)+2(u_{i-1}-u_{i-2})(u_{i-1}-\\
& u_i)\sin(3h\alpha)+(u_{i-1}-u_i)^2\sin(4h\alpha)))/256,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_2 = {} & \chi(-4h\alpha(1+h^2\alpha^2)(u_{i-1}-u_i)(u_i-u_{i+1})\\
& \cos(h\alpha)-4(-1+h^2\alpha^2)(u_{i-1}-u_i)(u_i-u_{i+1})\\
& \sin(h\alpha)+(u_{i-1}^2-2u_{i-1}u_i+2u_i^2-2u_iu_{i+1}+\\
& u_{i+1}^2)(2h\alpha(1+h^2\alpha^2)+(-1+h^2\alpha^2)\\
& \sin(2h\alpha)))/256,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_3 = {} & \chi(2h\alpha u_i^2+2h^3\alpha^3u_i^2-4h\alpha u_iu_{i+1}-4h^3\alpha^3u_iu_{i+1}+\\
& 4h\alpha u_{i+1}^2+4h^3\alpha^3u_{i+1}^2-4h\alpha u_{i+1}u_{i+2}-4h^3\alpha^3u_{i+1}u_{i+2}+\\
& 2h\alpha u_{i+2}^2+2h^3\alpha^3u_{i+2}^2-4h\alpha(1+h^2\alpha^2)(u_i-u_{i+1})\\
& (u_{i+1}-u_{i+2})\cos(h\alpha)+2(-1+h^2\alpha^2)(u_i-u_{i+1})\\
& (u_{i+1}-u_{i+2})\sin(h\alpha)+u_i^2\sin(2h\alpha)-\\
& h^2\alpha^2u_i^2\sin(2h\alpha)-2u_iu_{i+1}\sin(2h\alpha)+\\
& 2h^2\alpha^2u_iu_{i+1}\sin(2h\alpha)+2u_{i+1}u_{i+2}\sin(2h\alpha)-\\
& 2h^2\alpha^2u_{i+1}u_{i+2}\sin(2h\alpha)-u_{i+2}^2\sin(2h\alpha)+\\
& h^2\alpha^2u_{i+2}^2\sin(2h\alpha)+2u_iu_{i+1}\sin(3h\alpha)-\\
& 2h^2\alpha^2u_iu_{i+1}\sin(3h\alpha)-2u_{i+1}^2\sin(3h\alpha)+\\
& 2h^2\alpha^2u_{i+1}^2\sin(3h\alpha)-2u_iu_{i+2}\sin(3h\alpha)+\\
& 2h^2\alpha^2u_iu_{i+2}\sin(3h\alpha)+2u_{i+1}u_{i+2}\sin(3h\alpha)-\\
& 2h^2\alpha^2u_{i+1}u_{i+2}\sin(3h\alpha)-u_i^2\sin(4h\alpha)+\\
& h^2\alpha^2u_i^2\sin(4h\alpha)+2u_iu_{i+1}\sin(4h\alpha)-\\
& 2h^2\alpha^2u_iu_{i+1}\sin(4h\alpha)-u_{i+1}^2\sin(4h\alpha)+\\
& h^2\alpha^2u_{i+1}^2\sin(4h\alpha))/256,
\end{aligned}$$

其中 $\chi = \dfrac{h^3\alpha^3}{\sin((h\alpha)/2)^6\cos((h\alpha)/2)^2}$.

4）根据式(11)计算非线性权叫 ω_n，$n=1,2,3$. 并通过高斯-洛巴托求积点 x_G 处的重构点值 $u(x_G)$ 和数值积分得到

$$u_i^{(l)}(t) \approx \frac{1}{\sum_G \sigma_G(v_l^{(i)}(x_G))^2}\sum_G \sigma_G u(x_G,t)v_l^{(i)}(x_G),\ l=1,2, \tag{18}$$

其中 σ_G 是点 x_G 的高斯-洛巴托求积系数. 然后，通过 $u^h(x,t)=\sum_{l=0}^{2}u_i^{(l)}(t)v_l^{(i)}(x)$，$x\in I_i$，利用这些重构的自由度 $u_i^{(l)}(t)$，$l=1,2$ 和单元平均值 $u_i^{(0)}(t)$ 获得问题单元 I_i 中的三角函数多项式解.

本小节介绍了三角函数多项式空间中 TWENO 限制器的构造过程. 其构造思想与前面类似，首先使用 TVB 问题单元指示器找到问题单元，然后使用相邻单元的单元平均值通过 TWENO 限制器在问题单元内重构三角函数多项式. 文献[74]中的数值结果表明，当基于三角函数多项式空间的格式用于模拟波类和高频振荡问题时能得到更好的数值结果.

2.6　简单紧凑型 HWENO 限制器

首先使用 KXRCF 问题单元指示器[37]来检测问题单元，接着在一维标量情况下阐述简单紧凑型 HWENO 限制器的构造过程. 具体过程如下所示：

1）定义 DG 方法在 I_{i-1}，I_{i+1}，I_i 上的解多项式为 $p_0(x)$，$p_1(x)$ 和 $p_2(x)$. 现在，根据最小二乘法[15]的思想找到单元 I_{i-1} 上 $p_0(x)$ 的改进多项式 $\tilde{p}_0(x)$. 定义 $\tilde{p}_0(x)$ 是最小化问题

$$\min_{\forall \phi(x)\in \mathbf{P}^k(I_{i-1})}\left\{\int_{I_{i-1}}(\phi(x)-p_0(x))^2\mathrm{d}x\right\} \tag{19}$$

的解，要求 $\bar{\bar{\phi}}=\bar{\bar{p}}_2$，其中

$$\bar{\bar{\phi}}=\frac{1}{\Delta x_i}\int_{I_i}\phi(x)\mathrm{d}x,\ \bar{\bar{p}}_2=\frac{1}{\Delta x_i}\int_{I_i}p_2(x)\mathrm{d}x.$$

此处及下方的 $\bar{\bar{\bigstar}}$ 表示问题单元上函数★的单元平均值. $\tilde{p}_1(x)$ 是最小化问题

$$\min_{\forall \phi(x)\in \mathbf{P}^k(I_{i+1})}\left\{\int_{I_{i+1}}(\phi(x)-p_1(x))^2\mathrm{d}x\right\} \tag{20}$$

的解，要求 $\bar{\bar{\phi}}=\bar{\bar{p}}_2$. 为了符号的一致性，本课题组定义

$\widetilde{p}_2(x)=p_2(x)$. 最终的非线性 HWENO 重构多项式 $p_2^{new}(x)$定义为

$$p_2^{new}(x)=\omega_0\widetilde{p}_0(x)+\omega_1\widetilde{p}_1(x)+\omega_2\widetilde{p}_2(x). \quad (21)$$

如果非线性权满足 $\omega_0+\omega_1+\omega_2=1$,则 p_2^{new} 具有与 p_2 相同的单元平均值和逼近精度.

2) 选择线性权 $\gamma_0,\gamma_1,\gamma_2$. 如文献[51]所述,本课题组在 3 个单元 I_{i-1},I_{i+1},I_i 中使用了 3 个多项式 $p_0(x),p_1(x),p_2(x)$的完整信息,因此线性权只需任意选择和为 1 的正数即可保持高阶数值逼近.

3) 参照式(10)计算光滑指示器,参照式(11)计算非线性权.

4) 最终的非线性 HWENO 重构多项式由式(21)给出,即 $u_h^{new}|_{I_i}=p_2^{new}(x)=\omega_0\widetilde{p}_0(x)+\omega_1\widetilde{p}_1(x)+\omega_2\widetilde{p}_2(x)$.

二维结构网格和三角形网格上简单紧凑型 HWENO 限制器的构造过程参见文献[54,75]. 该简单紧凑型 HWENO 限制器的主要创新点是重构过程仅使用来自问题单元及其近邻单元的 DG 方法数值解的信息,空间模板非常紧凑. 在重构过程中使用的线性权不再需要根据计算网格的空间拓扑结构通过繁冗的数值计算获得,可以是任意和为 1 的正数. 因此,该限制器能在结构网格、非结构网格、杂交网格、运动网格、自适应网格等情况下灵活使用且对网格质量要求较低.

2.7 Multi-resolution WENO 限制器

本小节借鉴 multi-resolution 方法[76-86]构造了一种新型 multi-resolution WENO 限制器[87-88]. 本课题组仍在结构网格上针对一维标量双曲守恒律方程(1)构造 multi-resolution WENO 限制器[89]. 具体过程如下所示:

1) 在问题单元 I_i 上定义一系列不同次数的代数多项式 $q_\ell(x),\ell=0,1,\cdots,k$,满足

$$\int_{I_i}q_\ell(x)v_\ell^{(i)}(x)\mathrm{d}x=\int_{I_i}u_h(x)v_\ell^{(i)}(x)\mathrm{d}x. \quad (22)$$

2) 得到这些多项式的等价表达式. 为了保持符号一致,定义 $p_{0,1}(x)=q_0(x)$. 根据经典 CWENO 格式[64,90-93]提出的类似思想,得到多项式 $p_{\ell,\ell}(x),\ell=1,2,\cdots,k$:

$$p_{\ell,\ell}(x)=\frac{1}{\gamma_{\ell,\ell}}q_\ell(x)-\frac{\gamma_{\ell-1,\ell}}{\gamma_{\ell,\ell}}p_{\ell-1,\ell}(x),\quad \ell=1,2,\cdots,k, \quad (23)$$

其中 $\gamma_{\ell-1,\ell}+\gamma_{\ell,\ell}=1$ 且 $\gamma_{\ell,\ell}\neq0$.

$$p_{\ell,\ell+1}(x)=\omega_{\ell,\ell}p_{\ell,\ell}(x)+\omega_{\ell-1,\ell}p_{\ell-1,\ell}(x),\quad \ell=1,2,\cdots,k-1, \quad (24)$$

其中 $\omega_{\ell-1,\ell}+\omega_{\ell,\ell}=1$.

3) 计算光滑指示器 β_{ℓ,ℓ_2},用来判断函数 $p_{\ell,\ell_2}(x)$,$\ell=\ell_2-1,\ell_2,\ell_2=1,2,\cdots,k$ 在问题单元 I_i 上的光滑程度.

4) 计算非线性权. 根据文献[94-95]中提出的类似思想,定义:

$$\tau_{\ell_2}=(\beta_{\ell_2,\ell_2}-\beta_{\ell_2-1,\ell_2})^2,\ell_2=1,2,\cdots,k, \quad (25)$$

非线性权为

$$\omega_{\ell_1,\ell_2}=\frac{\bar{\omega}_{\ell_1,\ell_2}}{\sum_{\ell=\ell_2-1}^{\ell_2}\bar{\omega}_{\ell,\ell_2}},\bar{\omega}_{\ell_1,\ell_2}=\gamma_{\ell_1,\ell_2}\left(1+\frac{\tau_{\ell_2}}{\varepsilon+\beta_{\ell_1,\ell_2}}\right),\quad \ell_1=\ell_2-1,\ell_2;\ell_2=1,2,\cdots,k. \quad (26)$$

5) 问题单元 I_i 上的重构多项式 $u_h^{new}|_{I_i}=p^{new}(x)$ 为

$$p^{new}(x)=\sum_{\ell=\ell_2-1}^{\ell_2}\omega_{\ell,\ell_2}p_{\ell,\ell_2}(x),\ell_2=1,2,\cdots,k. \quad (27)$$

本小节只介绍了一维结构网格上 multi-resolution WENO 限制器的构造过程,二维结构网格和三角形网格上 multi-resolution WENO 限制器的构造过程参见文献[89,96]. DG 方法结合这种 multi-resolution WENO 限制器在求解双曲守恒律方程组时,可以在光滑区域保持 DG 方法的数值精度且在强间断附近有效抑制伪振荡的出现. 这种新型 multi-resolution WENO 限制器使用的线性权可以是任意和为 1 的正数. 这种新的 WENO 限制器构造非常简单且适用于任意高阶 DG 方法及应用于二维和三维问题的高精度数值求解.

3 总结及展望

本文综述了高精度 DG 方法和高精度 WENO 限制器的一般构造过程及其在双曲守恒律中的应用. 与现有高精度限制器相比,新型 WENO 限制器在以下几个方面独具创新:可以在多维(一维、二维以及三维)情况下保持物理量的守恒性和计算格式的鲁棒性,在解的光滑区域不会因限制器的原因导致计算精度下降,同时在强激波或接触间断区域保持本质无振荡性质;在解的光滑区域依然保持高阶数值精度的同时间断过渡区域更为狭窄,能显著提高激波分辨率;很好地保持了 DG 方法的空间紧致特性,对 DG 方法在求解定常可压缩流体问题的收敛性和收敛速度有较大改进;易于在非结构网格、混合网格、运动网格、自适应网格等复杂网格体系下构造和编程实现,随着计算问题的维数增加,限制器的构造和编程依然非常简单,显著降低计算机内存资源的占用进而显著提高计算效率. 截至目前,新型 WENO 限制器是已发表相关文献中空间最紧致、鲁棒性最高、编程实现最为简

便的一类高精度非线性限制器. 该类限制器具有较强的通用性,能在结构网格、非结构网格、杂交网格、运动网格、自适应网格等情况下灵活使用且对网格质量要求较低,且能够推广至任一紧致类格式,如重构校正方法(CPR)/通量重构(FR)格式、谱差分(SD)/谱体积(SV)方法等,因此具有较广泛的军事和商业工程应用前景.

参考文献:

[1] REED W H, HILL T R. Triangular mesh methods for neutron transport equation[R]. USA: Los Alamos Scientific Laboratory, 1973.

[2] COCKBURN B, HOU S, SHU C W. The Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws Ⅳ: the multidimensional case[J]. Mathematics of Computation, 1990, 54: 545-581.

[3] COCKBURN B, LIN S Y, SHU C W. TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws Ⅲ: one dimensional systems [J]. J Comput Phys, 1989, 84: 90-113.

[4] COCKBURN B, SHUC W. TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws Ⅱ: general framework [J]. Mathematics of Computation, 1989, 52: 411-435.

[5] COCKBURN B, SHU C W. The Runge-Kutta local projection P_1-discontinuous Galerkin finite element method for scalar conservation laws[J]. RAIRO Model Math Anal Numer, 1991, 25: 337-361.

[6] COCKBURN B, SHU C W. The Runge-Kutta discontinuous Galerkin method for conservation laws Ⅴ: multidimensional systems[J]. J Comput Phys, 1998, 141: 199-224.

[7] COCKBURN B. Discontinuous Galerkin methods for convection-dominated problems[C]// High-order methods for computational physics, volume 9 of lecture notes in computational science and engineering. Berlin: Springer, 1999: 69-224.

[8] COCKBURN B, SHU C W. Runge-Kutta discontinuous Galerkin method forconvection-dominated problems[J]. J Sci Comput, 2001, 16: 173-261.

[9] HESTHAVE N J, WARBURTON T. Nodal discontinuous Galerkin methods[M]. NewYork: Springer, 2008.

[10] LI B. Discontinuous finite elements in fluid dynamics and heat transfer[M]. Basel: Birkhauser, 2006.

[11] SHU C W. Discontinuous Galerkin methods: general approach and stability [C] // Numerical solutions of partial differential equations. Basel: Birkhäuser, 2009: 149-201.

[12] SHU C W, OSHER S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock capturing schemes[J]. J Comput Phys, 1988, 77: 439-471.

[13] SHU C W, OSHER S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock capturing schemes Ⅱ [J]. J Comput Phys, 1989, 83: 32-78.

[14] DUMBSER M. Arbitrary high order schemes for the solution of hyperbolic conservation laws in complex domains[M]. Aachen: Shaker Verlag, 2005.

[15] DUMBSER M, BALSARA D, TORO E F, et al. A unified framework for the construction of one-step finite-volume and discontinuous Galerkin schemes [J]. J Comput Phys, 2008, 227: 8209-8253.

[16] LI Z, YU X, JI A Z. The cell-centered discontinuous Galerkin method for Lagrangian compressible Euler equations in two dimensions[J]. Comput Fluids, 2014, 96: 152-164.

[17] LOUBERE R, OVADIA J, ABGRALL R. A Lagrangian discontinuous Galerkin-type method on unstructured meshes to solve hydrodynamics problems [J]. Int J Numer Methods Fluids, 2004, 44: 645-663.

[18] VILARF. Cell-centered discontinuous Galerkin discretization for two-dimensional Lagrangian hydrodynamics [J]. Comput Fluids, 2012, 64: 64-73.

[19] VILAR F, MAIREP H, ABGRALL R. Cell-centered discontinuous Galerkin discretizations for two-dimensional scalar conservation laws on unstructured grids and for one dimensional Lagrangian hydrodynamics[J]. Comput Fluids, 2010, 46: 498-604.

[20] VILAR F, MAIRE P H, ABGRALL R. A discontinuous Galerkin discretization for solving the two-dimensional gas dynamics equations written under total Lagrangian formulation on general unstructured grids[J]. J Comput Phys, 2014, 276: 188-234.

[21] JIA Z, ZHANG S. A new high-order discontinuous Galerkin spectral finite element method for Lagrangian gas dynamics in two-dimensions [J]. J Comput Phys, 2011, 230: 2496-2522.

[22] HE X J, YANG D H, MA X. A weighted Runge-Kutta discontinuous Galerkin method for 3D acoustic and elastic wave-field modeling[J]. Commun Comput Phys, 2020, 28: 372-400.

[23] LOU J L, LI L, LUO H, et al. Reconstructed discontinuous Galerkin methods for linear advection-diffusion equations based on first-order hyperbolic system[J]. J Comput Phys, 2018, 369: 103-124.

[24] LOU J L, LIU X D, LUO H, et al. Reconstructed discontinuous Galerkin methods for hyperbolic diffusion equations on unstructured grids[J]. Commun Comput Phys, 2019, 25: 1302-1327.

[25] BAO L,NAIRR D,TUFO H M. A mass and momentum ux-form high-order discontinuous Galerkin shallow water model on the cubed-sphere[J]. J Comput Phys,2014,271:224-243.
[26] GIRALDO F,HESTHAVEN J,WARBURTON T. Nodal high-order discontinuous Galerkin methods for spherical shallow water equations[J]. J Comput Phys,2002,181:499-525.
[27] GUO W,NAIR R,QIU J M. A conservative semi-Lagrangian discontinuous Galerkin scheme on the cubed sphere[J]. Mon Wea Rev,2013,142:457-475.
[28] HALL D,NAIR R. Discontinuous Galerkin transport on the spherical Yin-Yang overset mesh[J]. Mon Wea Rev,2013,142:264-282.
[29] NAIRR D,CHOI H W,TUFOH M. Computational aspects of a scalable high-orderdiscontinuous Galerkin atmospheric dynamical core[J]. Comput Fluids,2009,38:309-319.
[30] NAIRR D,LEVY M N,LAURITZEN P H. Emerging numerical methods for atmospheric modeling [J]. Numerical Techniques for Global Atmospheric Models,2011,80:189-250.
[31] NAIRR D,THOMAS S,LOFT R. A discontinuous Galerkin transport scheme on thecubed sphere[J]. Mon Wea Rev,2005,133:814-828.
[32] CHENG J,LIU T,LU O H. A hybrid reconstructed discontinuous Galerkin method for compressible flows on arbitrary grids[J]. Comput Fluids,2016,139:68-79.
[33] CHENG J,ZHANG F,LIU T. A high order compact least-squares reconstructed discontinuous Galerkin method for the steady-state compressible flows on hybrid grids[J]. J Comput Phys,2018,362:95-113.
[34] LEERB V,NOMURA S. Discontinuous Galerkin for diffusion[J]. AIAA Paper,2005,2005:5108.
[35] BISWAS R,DEVINE K D,FLAHERTY J. Parallel,adaptive finite element methods forconservation laws [J]. Appl Numer Math,1994,14:255-283.
[36] BURBEAU A,SAGAUT P,BRUNEAU C H. A problem-independent limiter for high-order Runge-Kutta discontinuous Galerkin methods[J]. J Comput Phys,2001,169:111-150.
[37] KRIVODONOVA L,XIN J,REMACLE J F,et al. Shock detectionand limiting with discontinuous Galerkin methods for hyperbolic conservation laws [J]. Appl Numer Math,2004,48:323-338.
[38] HARTEN A. ENO schemes with subcell resolution[J]. J Comput Phys,1989,83:148-184.
[39] FRIEDRICHS O. Weighted essentially non-oscillatory schemes for the interpolation of meanvalues on unstructured grids[J]. J Comput Phys,1998,144:194-212.
[40] HU C,SHU C W. Weighted essentially non-oscillatory schemes on triangular meshes[J]. J Comput Phys,1999,150:97-127.
[41] JIANG G,SHU C W. Efficient implementation of weighted ENO schemes[J]. J Comput Phys,1996,126:202-228.
[42] LIU X,OSHER S,CHAN T. Weighted essentially non-oscillatory schemes[J]. J Comput Phys,1994,115:200-212.
[43] SHU C W. Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemesfor hyperbolic conservation laws[J]. Lecture Notes in Mathematics,1998,1697:325-432.
[44] ZHU J,QIU J. Local DG method using WENO type limiters for convection diffusion problems[J]. J Comput Phys,2011,230:4353-4375.
[45] ZHU J,SHU C W. A new type of third-order finite volume multi-resolution WENO schemes on tetrahedral meshes[J]. J Comput Phys,2020,406:109212.
[46] ZHU J,SHU C W. Convergence to steady-state solutions of the new type of highorder multi-resolution WENO schemes:a numerical study [J]. Communications on Applied Mathematics and Computation,2020,2:429-460.
[47] BALSARA D,ALTMANN C,MUNZ C D,et al. A sub-cell based indicator for troubled zones in RKDG schemes and a novel class of hybrid RKDG+HWENO schemes [J]. J Comput Phys,2007,226:586-620.
[48] QIU J,SHU C W. Hermite WENO schemes and their application as limiters for Runge-Kutta discontinuous Galerkin method:one dimensional case[J]. J Comput Phys,2003,193:115-135.
[49] QIU J,SHU C W. Runge-Kutta discontinuous Galerkin method using WENO limiters[J]. SIAM J Sci Comput,2005,26:907-929.
[50] QIU J,SHU C W. Hermite WENO schemes and their application as limiters for Runge-Kutta discontinuous Galerkin method Ⅱ:two dimensional case[J]. Comput Fluids,2005,34:642-663.
[51] ZHONG X,SHU C W. A simple weighted essentially nonoscillatory limiter for Runge-Kutta discontinuous Galerkin methods[J]. J Comput Phys,2013,232:397-415.
[52] ZHU H,QIU J,ZHU J. A simple,high-order and compact WENO limiter for RKDG method[J]. Comput Math Appl,2020,79:317-336.
[53] ZHU J,ZHONG X,SHU C W,et al. Runge-Kutta discontinuous Galerkin method using a new type of WENO limiters on unstructured meshes[J]. J Comput

Phys,2013,248:200-220.

[54] ZHU J,ZHONG X,SHU C W,et al. Runge-Kutta discontinuous Galerkin method with a simple and compact Hermite WENO limiter on unstructured meshes [J]. Comm Computat Phy,2017,21:623-649.

[55] LUO H,BAUM J D,LOHNER R. A Hermite WENO-based limiter for discontinuous Galerkin method on unstructured grids[J]. J Comput Phys,2007,225:686-713.

[56] QIU J,SHU C W. A comparison of troubled-cell indicators for Runge-Kutta discontinuous Galerkin methods using weighted essentially nonoscillatory limiters[J]. SIAM J Sci Comput,2005,27:995-1013.

[57] ZHU J,QIU J,SHU C W,et al. Runge-Kutta discontinuous Galerkin method using WENO limiters Ⅱ:unstructured meshes[J]. J Comput Phys,2008,227:4330-4353.

[58] BOSCHERI W,BALSARAD S. High order direct Arbitrary-Lagrangian-Eulerian (ALE) PNPM schemes with WENO adaptive-order reconstruction on unstructured meshes[J]. J Comput Phys,2019,398:108899.

[59] BOSCHERI W,SEMPLICE M,DUMBSER M. Central WENO subcell finite volumelimiters for ADER discontinuous Galerkin schemes on fixed and moving unstructured meshes[J]. Commun Comput Phys,2019,25:311-346.

[60] ZHU J,QIU J. Hermite WENO schemes and their application as limiters for Runge-Kutta discontinuous Galerkin method Ⅲ:unstructured meshes[J]. J Sci Comput,2009,39:293-321.

[61] CRAVERO I,PUPPO G,SEMPLICE M,et al. CWENO:uniformly accurate reconstructions for balance laws[J]. Math Comput,2018,87:1689-1719.

[62] CRAVERO I,SEMPLICE M. On the accuracy of WENO and CWENO reconstructions of third order on nonuniform meshes[J]. J Sci Comput,2016,67:1219-1246.

[63] DUMBSER M,BOSCHERI W,SEMPLICE M,et al. Central WENO schemes for hyperbolic conservation laws on fixed and moving unstructured meshes[J]. SIAM J Sci Comput,2017,39:A2564-A2591.

[64] LEVY D,PUPPO G,RUSSO G. Central WENO schemes for hyperbolic systems of conservation laws M2AN[J]. Math Model Numer Anal,1999,33:547-571.

[65] DUMBSER M,ENAUX C,TORO E F. Finite volume schemes of very high order of accuracy for stiff hyperbolic balance laws[J]. J Comput Phys,2008,227:3971-4001.

[66] DUMBSER M,KASER M. Arbitrary high order non-oscillatory finite volume schemeson unstructured meshes for linear hyperbolic systems[J]. J Comput Phys,2007,221:693-723.

[67] DUMBSER M,KAESER M,TITAREV V A,et al. Quadrature-free non-oscillatory finite volume schemes on unstructured meshes for nonlinear hyperbolic systems [J]. J Comput Phys,2007,226:204-243.

[68] GOTTLIEB S,SHU C W,TADMOR E. Strong stability preserving high order time discretization methods[J]. SIAM Rev,2001,43:89-112.

[69] SHU C W. Total-variation-diminishing time discretizations [J]. SIAM J Sci Stat Comput,1988,9:1073-1084.

[70] HARTEN A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws[J]. J Comput Phys,1983,49:357-393.

[71] SHU C W. TVB uniformly high-order schemes for conservation laws[J]. Math Comp,1987,49:105-121.

[72] BALSARA D,SHU C W. Monotonicity preserving weighted essentially non-oscillatory schemes with increasingly high order of accuracy[J]. J Comput Phys,2000,160:405-452.

[73] ZHU J,QIU J. Runge-Kutta discontinuous Galerkin method using WENO-typelimiters: three-dimensional unstructured meshes[J]. Commun Comput Phys,2012,11:985-1005.

[74] ZHU J,QIU J. WENO schemes and their application as limiters for RKDG methods based on trigonometric approximation spaces[J]. J Sci Comput,2013,55:606-644.

[75] ZHU J,ZHONG X,SHU C W,et al. Runge-Kutta discontinuous Galerkin method with a simple and compact Hermite WENO limiter[J]. Comm Comput Phys,2016,19:944-969.

[76] ABGRALL R. Multiresolution analysis on unstructured meshes:application to CFD[C]//Numerical Methods for uid Dynamics Ⅴ Proceedings of the Conference. Oxford: Clarendon Press,1995:271-277.

[77] ABGRALL R. Multiresolution analysis on unstructured meshes: application to CFD[C]// Experimentation, Modelling and Computation in Ow, Turbulence and Combustion. Chichester:Computational Methods in Applied Sciences,1997:147-156.

[78] ABGRALL R,HARTEN A. Multiresolution representation in unstructured meshes[J]. SIAM J Numer Anal,1998,35:2128-2146.

[79] BURGER R,KOZAKEVICIUS A. Adaptive multiresolution WENO schemes for multispecies kinematic flow models [J]. J Comput Phys,2007,224:1190-1222.

[80] CHIAVASSA G,DONAT R,MULLER S. Multiresolution-based adaptive schemes for hyperbolic conservation laws[C]//Adaptive mesh refinement-theory and

applications, lecture notes in computational science and engineering. Berlin: Springer-Verlag, 2003: 137-159.

[81] DAHMEN W, GOTTSCHLICH-MULLER B, MULLER S. Multiresolution schemes for conservation laws[J]. Numer Math, 2001, 88: 399-443.

[82] HARTEN A. Multi-resolution analysis for ENO schemes [C]//Institute for Computer Applicationsin Science and Engineering. Hampton: NASA Langley Research Center, 1991: 23665.

[83] HARTEN A. Discrete multi-resolution analysis and generalized wavelets[J]. Appl Nume Math, 1993, 12: 153-192.

[84] HARTEN A. Adaptive multiresolution schemes for shock computations[J]. J Comput Phys, 1994, 115: 319-338.

[85] HARTEN A. Multiresolution algorithms for the numerical solution of hyperbolic conservation laws[J]. Com Pure Appl Math, 1995, 48: 1305-1342.

[86] HARTEN A. Multiresolution representation of data: a general framework[J]. SIAM J Numer Anal, 1996, 33: 1205-1256.

[87] ZHU J, SHU C W. A new type of multi-resolution WENO schemes with increasingly higher order of accuracy[J]. J Comput Phys, 2018, 375: 659-683.

[88] ZHU J, SHU C W. A new type of multi-resolution WENO schemes with increasingly higher order of accuracy on triangular meshes[J]. J Comput Phys, 2019, 392: 19-33.

[89] ZHU J, QIU J, SHU C W. High-order Runge-Kutta discontinuous Galerkin methods with a new type of multi-resolution WENO limiters[J]. J Comput Phys, 2020, 404: 109105.

[90] CAPDEVILLE G. A central WENO scheme for solving hyperbolic conservation laws on non-uniform meshes [J]. J Comput Phys, 2008, 227: 2977-3014.

[91] LEVY D, PUPPO G, RUSSO G. Compact central WENO schemes for multidimensional conservation laws [J]. SIAM J Sci Comput, 2000, 22: 656-672.

[92] ZHU J, QIU J. A new fifth order finitedifference WENO scheme for solving hyperbolicconservation laws[J]. J Comput Phys, 2016, 318: 110-121.

[93] ZHU J, QIU J. A new type of finite volume WENO schemes for hyperbolic conservation laws[J]. J Sci Comput, 2017, 73: 1338-1359.

[94] BORGES R, CARMONA M, COSTA B, et al. An improved weighted essentiallynon-oscillatory scheme for hyperbolic conservation laws[J]. J Comput Phys, 2008, 227: 3191-3211.

[95] CASTRO M, COSTA B, DON W S. High order weighted essentially non-oscillatory WENO-Z schemes for hyperbolic conservation laws[J]. J Comput Phys, 2011, 230: 1766-1792.

A brief survey on weighted essentially non-oscillatory limiters for discontinuous Galerkin methods

QIU Jianxian[1*], ZHU Jun[2]

(1. School of Mathematical Sciences, Xiamen University, Xiamen 361005, China;
2. College of Science, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 211106, China)

Abstract: Discontinuous Galerkin (DG) method belongs to a type of important high-order numerical methods for solving compressible hyperbolic conservation laws. Limiters for DG are very important to keep the stability of the DG methods, they are used to control the spurious oscillations for solving the problems containing strong discontinuities. The weighted essentially non-oscillatory (WENO) type limiters are proposed to overcome drawbacks of some existing literature-reported limiters which cannot keep the order of accuracy and sustain the spatial compactness of DG methods. Furthermore, most of reported limiters do not suit for the multi-dimensional numerical simulations on complex meshes. In recent decades, we have studied and proposed a series of high-order nonlinear limiters, including the high-order WENO and Hermite WENO (HWENO) limiters on three-dimensional unstructured meshes, WENO limiters based on trigonometric approximation spaces, simple and compact HWENO limiters among others. These WENO limiters secure advantages of keeping the order of accuracy and suppressing spurious oscillations without introducing any empirical parameters. They open a new way of studying new limiters for DG methods and enrich the basic research in this field. Finally, these high-order DG methods with new WENO limiters also embrace a broad prospect of large scale engineering applications.

Keywords: discontinuous Galerkin method; WENO method; limiter