中国科学: 数学　2024 年　第 54 卷　第 2 期: 121～138
SCIENTIA SINICA Mathematica
《中国科学》杂志社 SCIENCE CHINA PRESS
综　述

高精度 WENO 格式的发展与展望

朱君[1], 舒其望[2], 邱建贤[3*]

1. 南京航空航天大学数学学院, 南京 211106;
2. Division of Applied Mathematics, Brown University, Providence, RI 02912, USA;
3. 厦门大学数学科学学院, 厦门 361005

E-mail: zhujun@nuaa.edu.cn, shu@dam.brown.edu, jxqiu@xmu.edu.cn

收稿日期: 2023-08-23; 接受日期: 2023-11-01; 网络出版日期: 2023-12-15; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11872210 和 12071392) 资助项目

摘要　加权本质无振荡 (weighted essentially non-oscillatory, WENO) 格式是用于求解双曲守恒律方程和对流占优问题的一类高精度数值方法. WENO 格式设计的思想是在解的光滑区域中获得高阶数值精度, 而在解的间断附近保持本质无振荡的性质. 以这种思想设计的有限差分和有限体积高精度 WENO 格式在计算流体力学等领域中得到了广泛应用. 本文首先回顾 WENO 格式设计的基本思想和性质, 简要介绍近年来 WENO 格式研究方面的一些进展, 并阐述 US-WENO (unequal-sized WENO) 格式、MR-WENO (multi-resolution WENO) 格式和 HWENO (Hermite WENO) 格式的构造策略. 此外, 本文还介绍高精度 WENO 格式在结构网格和非结构网格上的一些进展, 展望这些高精度格式在多个领域中的应用以及未来的发展趋势.

关键词　计算流体力学　本质无振荡格式　加权本质无振荡格式　US-WENO 格式　MR-WENO 格式　HWENO 格式

MSC (2020) 主题分类　65M08

1　引言

本文对加权本质无振荡 (weighted essentially non-oscillatory, WENO) 格式近年来的研究进展进行综述, 并对未来进行展望. WENO 格式在本质无振荡 (essentially non-oscillatory, ENO) 格式基础上发展而来, 是求解双曲守恒律方程和对流占优问题的一类重要的高精度数值格式. 众所周知, 可压缩流体中广泛存在激波和接触间断, 而这些波系结构存在的区域内的数值解具有较强的间断性. 一些经典的计算流体力学数值格式无法有效处理这些强间断. 单调格式 [14,15] 只有一阶精度, 有着非常好的数值稳定性. 然而一阶格式收敛慢、计算效率低, 对于较为复杂的计算网格和多维问题无法有效使用. 虽然传统的有限差分、有限体积和有限元等高精度格式能提高计算效率, 但会在间断解附近产生虚假振

英文引用格式: Zhu J, Shu C-W, Qiu J. Development and prospect of high-order WENO schemes (in Chinese). Sci Sin Math, 2024, 54: 121–138, doi: 10.1360/SSM-2023-0236

　

荡并破坏数值格式的稳定性. 著名的 Godunov 定理指出只有非线性格式才能在解的光滑区域实现高阶数值精度并能在解的非光滑区域较好地模拟强间断 (参见文献 [22, 23]). 以全局总变差减少 (total variation diminishing, TVD) 格式为代表的非线性格式[26,55] 可以较好地解决这个问题. TVD 格式一般是通过设计如最小模数 (minmod) 限制器[26] 来实现非线性格式的有效构造 (参见文献 [38]), 能够对解的不连续区域产生单调的变换并在连续和单调区域中获得高阶数值精度 (参见文献 [56]). 但 TVD 格式会在解的光滑极值点附近产生精度退化到一阶的问题[55]. Goodman 和 LeVeque[24] 也证明了在二维情形下 TVD 格式只能达到一阶精度. Shu[72] 建立的全局总变差有界 (total variation bounded, TVB) 格式尝试利用松弛最小模数限制器的方法来避免光滑极值点附近计算格式数值精度退化的问题. 但在 TVB 格式的构造中, TVB 常数 M 与问题相关, 需要反复调整参数 M 来获得最佳的计算效果, 这使得格式的推广应用受到了一定约束.

ENO 格式是由 Harten 等[27] 提出的一类高精度激波捕捉格式. 该格式通过选择多个候选模板并利用差商计算候选模板上定义的代数多项式的光滑程度来选取重构多项式. 这样的设计使得 ENO 格式具有模板自动选择且格式鲁棒性较好, 在靠近激波处能有效保持本质无振荡的性质同时在解的光滑区域不存在精度退化的问题. Shu 和 Osher[74,75] 推广和构造了基于 TVD Runge-Kutta 时间离散的有限差分高精度 ENO 格式. 此后, 更多学者参与到了高精度 ENO 格式的构造和研究的工作中来, 这使得 ENO 格式的体系日趋完善而且在实践中得到广泛应用. 虽然 ENO 格式的数值稳定性好且计算精度较高, 但数值解及其导数在零点附近产生的舍入误差可能会改变模板的选择, 并且由于在相邻点处模板的改变会导致数值通量不光滑. 此外, ENO 格式在进行模板选择时为达到需要的数值精度会产生很多废弃的模板, 最终只有满足条件的一个模板被采纳并在其上构造相应的代数多项式, 因此这种处理方式会严重浪费计算机的运行时间和存储资源. 同时在执行效率方面, 由于 ENO 格式的模板选择程序包含了很多分支型的结构, 因此在实际使用中效率较低且程序书写的规范性较差. 这些问题的存在严重影响到高精度 ENO 格式的应用和推广, 而高精度 WENO 格式正是基于这些原因发展起来的一类新型高精度数值格式. 这些 WENO 格式是高精度 ENO 格式的有效扩展, 可以在保持 ENO 格式良好性质的同时克服上述缺点.

不同于 ENO 格式只选择一个最光滑的候选模板, WENO 格式使用所有的候选模板组合来进行高精度空间数值离散. 高精度 WENO 格式构造的关键因素是模板的选择和非线性权的构造. 当所有候选模板上的多项式都充分光滑时, 非线性权应该与线性权接近, 这样可以从重构多项式的组合中提供尽可能高的空间离散精度. 当候选模板上的数值解存在强间断而其他模板上的数值解充分光滑时, 间断区域的模板应该选择较小的非线性权以此来减少对应的重构多项式对数值计算结果的影响, 并不出现伪振荡. Liu 等[50] 提出了第一个用于求解双曲守恒律方程的三阶有限体积 WENO 格式. 该格式可以从 $k+1$ 阶 ENO 格式相同的模板中构造具有 $k+2$ 阶数值精度的 WENO 格式. Jiang 和 Shu[32] 建立了由 $k+1$ 阶 ENO 格式相同的模板构造 $2k+1$ 阶数值精度的 WENO 格式的一般框架. 他们构造的五阶有限差分 WENO 格式 (称为 WENO-JS 格式) 在高精度 WENO 格式的发展史上具有里程碑意义, 并已在多个领域得到了广泛应用. 由于计算网格的拓扑结构不同, 因此高精度 WENO 格式设计的一个困难之处在于最优的线性权的计算. 在极端情形下, 有时会出现线性权为负值或不存在的现象, 因此格式的编程难度较大且鲁棒性较难保持. 而且 WENO 格式在空间高精度数值离散时在多个候选模板中采用相同个数的信息, 所以为了达到高阶精度需要选择较大的空间模板, 这使得计算开销较大且空间紧致性较差. 为了提高 WENO 格式的计算效率, 可以使用紧致格式来设计 WENO 格式[37]. 但这种紧致 WENO 格式在强激波或者强间断附近会产生较明显的数值振荡. 为了有效解决这些困难, 杂交紧致 WENO 格式和加权紧致 WENO 格式被设计出来并已在多个领域取得了较好的应用 (参见文

献 [1,17,18,33,53,85]).

间断 Galerkin (discontinuous Galerkin, DG) 格式是研究基于多维结构和非结构网格的双曲守恒律方程时常使用的高精度紧凑型数值格式 (参见文献 [11–13]). Qiu 和 Shu [61–63,65] 在设计 DG 格式限制器过程中考虑到格式的紧致性构建了高精度 Hermite WENO (HWENO) 格式. 高精度有限差分和有限体积 HWENO 格式同时利用了数值解的信息和导数信息进行重构, 利用较小的空间模板可实现较高的数值精度和计算格式的紧致性. Zhu 和 Qiu [92,95] 在经典 WENO 格式的基础上, 提出了非等距空间模板选取及不同次多项式凸组合的核心构造理念, 设计了简便实用且具有高精度的有限差分和有限体积不等大小 WENO (unequal-sized WENO, US-WENO) 格式. US-WENO 格式可以选择任意和为 1 的正数作为线性权, 并且通过非线性权的凸组合使格式在解的光滑区域达到高阶精度. US-WENO 格式不仅实现了线性权的任意选择, 而且将不等距空间模板应用于 WENO 格式的设计, 这使 WENO 格式可以更好地应用于非结构网格高精度数值格式的构造研究. US-WENO 格式受到国内外一些学者的关注并在多个研究领域中得到一定应用. Zhao 和 Qiu [88] 利用 US-WENO 格式构造了一类线性权可以任意选择的 HWENO 格式, Chunhua Sheng 在由美国国家航空和宇宙航行局 (National Aeronautics and Space Administration of USA) 资助并由密西西比州立大学开发的航空工程计算平台 U^{2}NCLE 中植入了 US-WENO 格式, 葛宁在国产航空发动机叶轮机械内流机理研究及研发的 NUAA-Turbo 2.0 软件中使用了 US-WENO 格式进行空间离散. 第 3 节将介绍 US-WENO 格式的构造及其应用. Zhu 和 Shu [102,103,105] 在 WENO 格式基础上提出了嵌套模板组合的概念, 在结合低阶算法 (在间断处逐渐降至一阶精度) 的基础上发展了更具有工程应用潜力的高精度多分辨率 WENO (multi-resolution WENO, MR-WENO) 格式. 与经典 WENO 格式 [31,68] 相比, 有限差分和有限体积高精度 US-WENO 格式和 MR-WENO 格式的计算效率有一定提升, 计算机的存储空间占用较少, 是目前已发表文献中空间模板较少、易于编程实现、收敛性和鲁棒性更优、可拓展至任意高阶数值精度的 WENO 格式.

本文余下内容的安排如下. 第 2 节详细介绍经典 WENO 格式 [32,73] 的构造并分析 WENO 格式的性质. 第 3 节介绍利用不等距模板组合构造的高精度 US-WENO 格式. 第 4 节重点介绍嵌套模板组合概念, 以及如何利用低阶算法实现高阶精度 MR-WENO 格式的构造过程. 第 5 节介绍 HWENO 格式的构造过程. 第 6 节给出高精度 WENO 格式的总结和展望.

2 WENO-JS 格式

本文以一维方程为例介绍有限体积 WENO-JS 格式 [32,73] 的构造过程. 考虑如下的一维标量守恒律方程:

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0, \\ u(x;0) = u_0(x). \end{cases} \tag{2.1}$$

计算网格由以下点构成:

$$\cdots < x_{\frac{1}{2}} < x_{\frac{3}{2}} < x_{\frac{5}{2}} < \cdots,$$

令 $I_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$, $\Delta x_i = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$. 假设计算网格是等距分布的, 则记 $h = \Delta x_i$. 分片光滑函数 $u(x,t)$ 在网格 I_i 上的单元平均值为

$$\overline{u}(x_i, t) = \frac{1}{h}\int_{I_i} u(x,t)dx, \quad i = \dots, 1, 2, 3, \dots$$

对 (2.1) 在 I_i 上积分可得

$$\frac{d\bar{u}(x_i,t)}{dt}+\frac{1}{h}(f(u(x_{i+1/2},t))-f(u(x_{i-1/2},t)))=0. \tag{2.2}$$

(2.2) 中的通量 $f(u(x_{i+1/2},t))$ 可用数值流通量 $\hat{f}_{i+1/2}$ 近似. 可以得到如下守恒的半离散格式:

$$\frac{d\bar{u}_i}{dt}=L(u_i)=-\frac{1}{h}(\hat{f}_{i+1/2}-\hat{f}_{i-1/2}), \tag{2.3}$$

其中 $\hat{f}_{i+1/2}$ 可以使用任意单调数值通量表示, 如 Lax-Friedrichs 通量 [76]

$$\hat{f}(a,b)=\frac{1}{2}[f(a)+f(b)-\alpha(b-a)], \tag{2.4}$$

其中 $\alpha=\max_u|f'(u)|$. 数值通量 $\hat{f}_{i+1/2}=\hat{f}(u^-_{i+1/2},u^+_{i+1/2})$, 其中 $u^{\pm}_{i+1/2}$ 可以利用 WENO 重构得到, 具体实现过程如下所示.

本节以五阶有限体积 WENO-JS 格式 [32, 73] 为例来阐述高精度空间离散过程. 为了构造重构多项式, 取如下 3 个小模板:

$$S_1=\{I_{i-2},I_{i-1},I_i\},\quad S_2=\{I_{i-1},I_i,I_{i+1}\},\quad S_3=\{I_i,I_{i+1},I_{i+2}\}.$$

简记 I_j 上的单元平均值为 $\bar{u}_j=\overline{u}(x_j,t)$. 令 $p_1(x)$、$p_2(x)$ 和 $p_3(x)$ 分别为 3 个模板上的重构二次多项式, 需要满足条件

$$\frac{1}{h}\int_{I_{i+l+j-3}}p_l(x)dx=\bar{u}_{i+l+j-3},\quad l=1,2,3,\quad j=0,1,2. \tag{2.5}$$

这些候选模板上多项式的任意凸组合理论上只有三阶精度. 为了在解的光滑区域获得更高的数值精度, 选定包含所有候选模板中网格的大模板 $S=\{I_{i-2},I_{i-1},I_i,I_{i+1},I_{i+2}\}$. 在大模板 S 上构造四次重构多项式 $p(x)$, 需要满足条件

$$\frac{1}{h}\int_{I_{i+j}}p(x)dx=\bar{u}_{i+j},\quad j=-2,-1,0,1,2, \tag{2.6}$$

且该多项式在 I_i 边界处需要满足

$$p(x_{i+1/2})=\sum_{k=1}^{3}\gamma_k p_k(x_{i+1/2}), \tag{2.7}$$

这里 γ_k 称为线性权. 因为线性权需要满足上面的关系式, 所以线性权与计算网格的拓扑结构有关并且不能取任意值. 通过计算可以得到这些多项式在 I_i 边界处的一组线性权为

$$\gamma_1=\frac{1}{10},\quad \gamma_2=\frac{3}{5},\quad \gamma_3=\frac{3}{10}.$$

Jiang 和 Shu [32] 及 Shu [73] 使用如下定义的光滑指示器来表示重构多项式在目标单元 I_i 上的光滑程度:

$$\beta_k=\sum_{l=1}^{2}h^{2l-1}\int_{I_i}\left(\frac{d^l}{dx^l}p_k(x)\right)^2dx. \tag{2.8}$$

对于均匀网格, 3 个光滑指示器的计算结果为

$$\begin{aligned}\beta_1&=\frac{13}{12}(\bar{u}_{i-2}-2\bar{u}_{i-1}+\bar{u}_i)^2+\frac{1}{4}(\bar{u}_{i-2}-4\bar{u}_{i-1}+3\bar{u}_i)^2,\\ \beta_2&=\frac{13}{12}(\bar{u}_{i-1}-2\bar{u}_i+\bar{u}_{i+1})^2+\frac{1}{4}(\bar{u}_{i-1}-\bar{u}_{i+1})^2,\\ \beta_3&=\frac{13}{12}(\bar{u}_i-2\bar{u}_{i+1}+\bar{u}_{i+2})^2+\frac{1}{4}(3\bar{u}_i-4\bar{u}_{i+1}+\bar{u}_{i+2})^2.\end{aligned}\tag{2.9}$$

为了使格式能在解的光滑区域达到五阶精度并在解的强间断区域不出现数值振荡, 需要结合线性权和光滑指示器来设置非线性权. 本文利用线性权和光滑指示器计算非线性权

$$\omega_k=\frac{\tilde{\omega}_k}{\sum_{r=1}^3\tilde{\omega}_r},\quad \tilde{\omega}_r=\frac{\gamma_r}{(\epsilon+\beta_r)^2},\tag{2.10}$$

其中 ϵ 为一个很小的正数, 一般可以取 10^{-6} 来避免出现分母为 0 的情形. 按照这种方法构造的非线性权形成的重构多项式的凸组合可以在解的光滑区域达到五阶数值精度. 这种做法也可以保证 WENO 格式的计算结果在解的强间断区域具有本质无振荡的性质. 若 3 个小模板上都不存在强间断, 则 3 个重构多项式在目标单元上都是光滑的, 它们的凸组合不论非线性权如何取也都具有本质无振荡的性质. Balsara 和 Shu [5] 基于这种构造思想在结构网格上得到具有更高数值精度的有限差分 WENO 格式.

上面主要介绍了 WENO-JS 格式的空间离散, 在实际使用中还需要对时间变量进行离散, 即 (2.1) 经过上面的空间半离散后得到常微分方程, 还需要使用强稳定性保持 (strong stability preserving, SSP) Runge-Kutta 方法对其进行时间离散得到 (2.1) 的时空全离散格式. 这类方法中常用的是三阶 TVD Runge-Kutta 方法 [73]:

$$\begin{aligned}u^{(1)}&=u^n+\Delta tL(u^n),\\ u^{(2)}&=\frac{3}{4}u^n+\frac{1}{4}u^{(1)}+\frac{1}{4}\Delta tL(u^{(1)}),\\ u^{n+1}&=\frac{1}{3}u^n+\frac{2}{3}u^{(2)}+\frac{2}{3}\Delta tL(u^{(2)}).\end{aligned}\tag{2.11}$$

公式中的 $L(u)$ 是空间离散算子, 其中共有 3 个算子 $L(u^n)$、$L(u^{(1)})$ 和 $L(u^{(2)})$ 需要计算. 每个算子的求解过程对应一次 WENO 重构, 则使用三阶 TVD Runge-Kutta 方法进行时间推进时需要进行三次重构运算, 这对于一些较为复杂的系统而言, 计算量较大. 此外, 还有一类常用的时间离散方法是 Lax-Wendroff 方法. 该方法在时间方向上进行 Taylor 展开并反复使用控制方程将展开式中的时间导数转化为空间导数, 最后利用高阶中心差分格式将所有的空间导数离散到对应的数值精度阶. Lax-Wendroff 方法与三阶 TVD Runge-Kutta 方法相比, 时间离散不需要进行多次重构, 但在时间和空间导数的转化过程中需要计算通量 $f(u)$ 的高阶空间导数. 这种处理过程对于标量方程的计算量不大, 但 $f(u)$ 对于如 Euler 方程等情形的高阶空间导数的计算较为复杂.

经典的五阶有限差分和有限体积 WENO-JS 格式 [32, 73] 一经发表就受到国内外众多学者的关注并被广泛应用于各个研究领域. 在湍流领域, Shahmardi 等 [68] 利用 WENO 格式对含聚合物的湍流管道流动进行了模拟. Fiévet 等 [21] 对振动非平衡和湍流混合的耦合问题进行了数值分析和研究. Kamath 等 [35] 进行了自由面湍流阻尼 Reynolds 平均 Navier-Stokes (Reynolds-averaged Navier-Stokes, RANS) 方程模拟. Yu 和 Lipatnikov [82] 研究了湍流反应流中的表面平均量及其演化方程. Sharma 等 [69] 基于 3 种湍流模型研究了超声速边界层内有壁面传热的湍流流动结构. WENO 格式也被广泛应用在冲击波、爆炸、化学反应和多尺度流的研究领域. Ou 和 Zhai [58] 研究了激波圆柱 (shock-cylinder) 的相互作

用. Vevek 等[77] 分析了双 Mach 反射问题的可替代建制 (setup). Hao 等[25] 对非理想流动中的涡面进行了追踪. Hejranfar 和 Rahmani[28] 模拟了高速可压缩无黏流动中的激波相互干扰问题. Deng 等[16] 对双后台阶中两个剪切层的相互作用进行了数值模拟. Mo 等[54] 进行了爆炸分散颗粒材料的介观尺度研究. Huang 和 Wang[30] 研究了二维自由来流扰动与斜激波的相互作用. WENO-JS 格式[32,73] 在超声速和高超声速流动模拟中也有着较好的应用效果. Yang 等[81] 对超声速横流中的横向射流进行了数值研究. Huang 等[29] 研究了高超声速冷壁湍流边界层中的湍流模型. Shi 等[71] 研究了粗糙元对高超声速边界层感受性的影响. Li 等[42] 研究了液体射流在凹腔超声速燃烧室中的分布特性和混合机理. Ou 和 Chen[57] 对高超声速近连续区平板绕流进行了数值模拟. 除了以上介绍的一些应用以外, WENO-JS 格式[32,73] 在多相多物质流、爆轰、燃烧和火焰, 辐射传输和动理学方程, 流体结构与弹性分析等领域也有着重要的应用.

为了提高 WENO-JS 格式[32,73] 的应用效果, 有更多的学者对 WENO-JS 格式[32,73] 进行了改进和提高. 经典的 WENO-JS 格式存在的最大问题就是线性权要根据精度要求来唯一确定, 但有时会出现负线性权甚至线性权不存在的情形. 而在求解双曲守恒律方程时, 负线性权的出现会导致强间断附近伪振荡的出现从而导致格式计算的不稳定. 众多学者针对这个问题提出了两类不同的解决方法: 一类是 Shi 等[70] 提出的在出现负线性权时通过对 WENO 格式线性权的局部调整, 使得格式仍然保持稳定不出现伪振荡. Qiu 和 Shu[60] 利用这种方法构建了高阶中心 WENO 格式. Puppo 和 Russo[59] 使用这种技术建立了高阶交错有限差分格式. 另一类处理方法是确保只有正的线性权出现, 但即便在解的光滑区域也会严重破坏 WENO 格式的高阶数值精度, 这种构造思想主要应用在高维的非结构网格上. 这两类处理方法并没有从根源上解决线性权为负值或不存在的问题. 最根本的解决方法是消除线性权对计算网格空间拓扑结构的依赖性, 使其可以选择任意和为 1 的正数. Zhu 和 Qiu[95] 利用非等距模板设计了高精度有限差分和有限体积 US-WENO 格式, 可以有效实现线性权任取和为 1 的正数且对计算网格的空间拓扑结构没有要求. 该 WENO 格式在结合了光滑指示器后可以得到新的非线性权的计算公式, 能在解的光滑区域保持高阶精度且在解的强间断区域保持本质无振荡的性质. 第 3 节将详细介绍一维五阶有限体积 US-WENO 格式的构造和应用.

3 US-WENO 格式

Zhu 和 Qiu[95–99] 基于非等距模板方法发展了一类高精度 US-WENO 格式. 因为 US-WENO 格式在空间高精度离散时线性权的限制较少, 易于编程实现并且不受计算网格空间拓扑结构的约束, 因此这种新型 WENO 格式适用于非结构网格、自适应网格和运动网格等上的高精度数值格式的构造和研究. 本文仍以一维双曲守恒律方程为例, 相关的计算网格剖分、物理量的定义及数值通量的处理方法与第 2 节相同. 本节介绍一维五阶有限体积 US-WENO 格式的构造过程并分析格式的特点.

本文在模板选择上不同于 WENO-JS 格式[32,73], 首先选择大模板 $S_1 = \{I_{i-2}, I_{i-1}, I_i, I_{i+1}, I_{i+2}\}$ 及两个小模板 $S_2 = \{I_{i-1}, I_i\}$ 和 $S_3 = \{I_i, I_{i+1}\}$. 接着在大模板上构造四次多项式 $p_1(x)$, 需要满足以下条件:

$$\frac{1}{h}\int_{I_{i+j}} p_1(x)dx = \bar{u}_{i+j}, \quad j = -2, -1, 0, 1, 2. \tag{3.1}$$

同理, 可在两个小模板 S_2 和 S_3 上分别构造线性多项式 $p_2(x)$ 和 $p_3(x)$, 需要满足以下条件:

$$\frac{1}{h}\int_{I_{i+j}} p_2(x)dx = \bar{u}_{i+j}, \quad j = -1, 0, \tag{3.2}$$

$$\frac{1}{h}\int_{I_{i+j}} p_3(x)dx = \bar{u}_{i+j}, \quad j=0,1. \tag{3.3}$$

根据中心 WENO (central WENO, CWENO) 格式 [8,39,40] 的构造思想, 本文不需要通过 (2.7) 求得目标单元 I_i 边界点处的最优线性权而是可以选择非零的任意线性权 γ_1 及任意线性权 γ_2 和 γ_3. 然后将 $p_1(x)$ 改写成

$$p_1(x) = \gamma_1\left(\frac{1}{\gamma_1}p_1(x) - \sum_{\ell=2}^{3}\frac{\gamma_\ell}{\gamma_1}p_\ell(x)\right) + \sum_{\ell=2}^{3}\gamma_\ell p_\ell(x). \tag{3.4}$$

为保证空间离散的数值稳定性, 可以要求这些线性权为正数并满足 $\sum_{\ell=1}^{3}\gamma_\ell = 1$. 利用 (2.8) 计算可得 3 个模板上的光滑指示器 β_l, $l=1,2,3$. β_l 越小, 则多项式 $p_l(x)$ 在目标网格 I_i 上越光滑. 具体表达式为

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \frac{1}{144}(\bar{u}_{i-2} - 8\bar{u}_{i-1} + 8\bar{u}_{i+1} - \bar{u}_{i+2})^2 \\ &\quad + \frac{1}{15600}(-11\bar{u}_{i-2} + 174\bar{u}_{i-1} - 326\bar{u}_i + 174\bar{u}_{i+1} - 11\bar{u}_{i+2})^2 \\ &\quad + \frac{781}{2880}(-\bar{u}_{i-2} + 2\bar{u}_{i-1} - 2\bar{u}_{i+1} + \bar{u}_{i+2})^2 \\ &\quad + \frac{1421461}{1310400}(\bar{u}_{i-2} - 4\bar{u}_{i-1} + 6\bar{u}_i - 4\bar{u}_{i+1} + \bar{u}_{i+2})^2, \end{aligned}\tag{3.5}$$

$$\beta_2 = (\bar{u}_{i-1} - \bar{u}_i)^2, \tag{3.6}$$

$$\beta_3 = (\bar{u}_i - \bar{u}_{i+1})^2. \tag{3.7}$$

(3.5)–(3.7) 分别进行 Taylor 展开可得

$$\beta_1 = h^2(u_i')^2 + h^4\left(\frac{1}{12}u_i'u_i''' + \frac{13}{12}(u_i'')^2\right) + h^6\left(\frac{1043}{960}(u_i''')^2 - \frac{21}{320}u_i'u_i^{(5)} + \frac{7}{80}u_i''u_i^{(4)}\right) + O(h^8), \tag{3.8}$$

$$\beta_2 = h^2(u_i')^2 - h^3u_i'u_i'' + h^4\left(\frac{1}{4}(u_i'')^2 + \frac{5}{12}u_i'u_i'''\right) + O(h^5), \tag{3.9}$$

$$\beta_3 = h^2(u_i')^2 + h^3u_i'u_i'' + h^4\left(\frac{1}{4}(u_i'')^2 + \frac{5}{12}u_i'u_i'''\right) + O(h^5). \tag{3.10}$$

接着利用线性权和光滑指示器来计算非线性权. 利用上面的 Taylor 展开式 (3.8)–(3.10), 可得

$$\begin{cases}\beta_1 - \beta_2 = h^3u_i'u_i'' + O(h^4) = O(h^3), \\ \beta_1 - \beta_3 = -h^3u_i'u_i'' + O(h^4) = O(h^3).\end{cases}\tag{3.11}$$

与文献 [6,9] 一样, 定义

$$\tau = \left(\frac{|\beta_1 - \beta_2| + |\beta_1 - \beta_3|}{2}\right)^2 = O(h^6). \tag{3.12}$$

则非线性权定义如下:

$$\omega_k = \frac{\tilde{\omega}_k}{\sum_{l=1}^{3}\tilde{\omega}_l}, \quad \tilde{\omega}_k = \gamma_k\left(1 + \frac{\tau}{\epsilon + \beta_k}\right), \quad k=1,2,3. \tag{3.13}$$

若 $\epsilon \ll \beta_k$, 则在光滑区域中应用 (3.8)–(3.10) 和 (3.12), 可得

$$\frac{\tau}{\epsilon + \beta_k} = O(h^4), \quad k = 1, 2, 3. \tag{3.14}$$

这表明在光滑区域中 $\omega_k = \gamma_k + O(h^4)$, 即非线性权与线性权基本一致的情形下 WENO 格式可以达到五阶数值精度. 利用非线性权对多项式进行组合最终可得对应五阶精度的空间离散

$$u^-_{i+1/2} \approx \omega_1\left(\frac{1}{\gamma_1}p_1(x_{i+1/2}) - \sum_{\ell=2}^{3}\frac{\gamma_\ell}{\gamma_1}p_\ell(x_{i+1/2})\right) + \sum_{\ell=2}^{3}\omega_\ell p_\ell(x_{i+1/2}). \tag{3.15}$$

上面主要介绍了 US-WENO 格式的高精度空间离散, 在实际使用中还需要使用三阶 TVD Runge-Kutta 方法 [73] 对常微分方程进行时间离散得到全离散格式.

注意, 在上面的构造过程中, 使用通量分裂后的节点值信息 f_j^+ 替换网格均值 $\bar{u}_j$ 保持模板上的多项式表达形式不变, 再利用相同的方法来构造线性权、光滑指示器和非线性权以及时间离散方法就可以得到相应的五阶有限差分 US-WENO 格式.

通过以上分析可以发现高精度有限差分和有限体积 US-WENO 格式的特点是, 空间离散简单且容易编程实现, 线性权的取值不再与计算网格的空间拓扑结构有关, 而且能够在解的光滑区域保持高阶精度. 这些特点使得此格式在多个领域得到应用. Balsara 等 [4] 在 US-WENO 格式的基础上得到了任意高阶 WENO 格式, 并且构建了非结构网格上的自适应高阶 WENO 格式 [3]. Zhu 和 Qiu [98] 利用 US-WENO 格式构造了基于 Hamilton-Jacobi 方程的有限差分 WENO 格式. Lu 等 [51] 将 US-WENO 格式用于模拟一类特殊的浅水波方程, 获得了较好的数值结果. Dumbser 等 [19] 提出了一类新的任意高阶精确中心加权 CWENO 有限体积格式, 用于求解二维、三维空间中固定和移动非结构单形网格上的双曲守恒律方程. Zhao 等 [87,90] 发展了杂交有限差分 WENO 格式和有限体积 HWENO 格式, 用于求解双曲守恒律方程. Zhang 等 [86] 利用 US-WENO 格式设计了一种新的六阶有限差分 WENO 格式来求解分数阶微分方程. Zhu 和 Qiu [98] 基于 US-WENO 格式设计了一个新的五阶有限差分 WENO 格式来逼近 Hamilton-Jacobi 方程的黏性数值解. 这种新的 WENO 格式是用一个四次多项式和两个线性多项式构成凸组合, 优点是计算精度高且鲁棒性好, 能对 Hamilton-Jacobi 方程实现较好的数值模拟 (参见文献 [98]). 有限体积 US-WENO 格式在非结构网格上也有着较好的应用. 例如, Zhu 和 Qiu [99] 将 US-WENO 格式构造思想用于三角形网格, 设计了三阶和四阶有限体积 WENO 格式来求解双曲守恒律方程. Zhu 和 Qiu [93] 得到一个新的五阶有限体积 US-WENO 格式, 该格式有较好的紧致性和鲁棒性对于一些稳态问题能够保持良好的收敛性. 此外, Ren 等 [67] 将 US-WENO 格式与高阶快速扫描方法结合构建了一种新的五阶有限差分 WENO 格式并用于直接求解静态 Hamilton-Jacobi 方程. 为了节省 WENO 格式高精度空间离散的计算成本, 他们采用了高阶线性格式和高精度 WENO 格式杂交的方法可以有效提高计算效率并具有较强的鲁棒性.

4 MR-WENO 格式

Zhu 和 Shu [102,103,105] 基于非等距中心嵌套模板方法发展了一类高精度 MR-WENO 格式. 由于 MR-WENO 格式在空间离散时使用的一系列不等距空间模板均是中心模板且线性权的选择较简单, 易于编程实现并且不受计算网格的空间拓扑结构的约束, 因此这种新型 WENO 格式特别适用于非结构网格、自适应网格和运动网格等上的高精度数值格式的构造和研究 (参见文献 [102,103,105]). 本文仍

以一维双曲守恒律方程为例, 相关的计算网格剖分、物理量的定义及数值通量的处理方法与第 2 节相同, 不再赘述. 本节将介绍一维有限体积 MR-WENO 格式的构造过程并分析格式的特点.

利用有限体积 MR-WENO 格式对 $u_{i+1/2}^-$ 进行重构. 选取中心模板 $S_k=\{I_{i-(k-1)},\ldots,I_{i+(k-1)}\}$, $k=1,\ldots,5$. 在模板上构造多项式 $q_k(x)$ 次数分别为 $2k-2$ 次, 需要满足如下条件:

$$\frac{1}{h}\int_{I_j} q_k(x)dx=\bar{u}_j,\quad j=i-(k-1),\ldots,i+(k-1). \tag{4.1}$$

文献 [73] 给出 $q_k(x)$, $k=1,\ldots,5$ 的精确表达式. 本文给出与 $q_k(x)$ 等价的多项式 $p_k(x)$ 的表达式. 这些多项式需要满足如下条件:

$$\begin{aligned}
&p_1(x)=q_1(x),\\
&p_2(x)=\frac{1}{\gamma_{2,2}}q_2(x)-\frac{\gamma_{1,2}}{\gamma_{2,2}}p_1(x),\\
&p_3(x)=\frac{1}{\gamma_{3,3}}q_3(x)-\frac{\gamma_{1,3}}{\gamma_{3,3}}p_1(x)-\frac{\gamma_{2,3}}{\gamma_{3,3}}p_2(x),\\
&p_4(x)=\frac{1}{\gamma_{4,4}}q_4(x)-\frac{\gamma_{1,4}}{\gamma_{4,4}}p_1(x)-\frac{\gamma_{2,4}}{\gamma_{4,4}}p_2(x)-\frac{\gamma_{3,4}}{\gamma_{4,4}}p_3(x),\\
&p_5(x)=\frac{1}{\gamma_{5,5}}q_5(x)-\frac{\gamma_{1,5}}{\gamma_{5,5}}p_1(x)-\frac{\gamma_{2,5}}{\gamma_{5,5}}p_2(x)-\frac{\gamma_{3,5}}{\gamma_{5,5}}p_3(x)-\frac{\gamma_{4,5}}{\gamma_{5,5}}p_4(x).
\end{aligned} \tag{4.2}$$

这里的 $\gamma_{l,k}$ 为线性权, 需要满足 $\sum_{l=1}^k\gamma_{l,k}=1$, $\gamma_{k,k}\neq 0$, $k=2,\ldots,5$. 按照文献 [20,91,95,97,109] 中的设计思想, 举例如下. 令 $\gamma_{l,k}=\frac{\tilde{\gamma}_{l,k}}{\sum_{t=1}^k\tilde{\gamma}_{t,k}}$, 并且 $\tilde{\gamma}_{l,k}=10^{l-1}$, $l=1,\ldots,k$, $k=2,\ldots,5$. 则可以得到一组线性权为

$$\begin{aligned}
&\gamma_{1,2}=\frac{1}{11},\quad \gamma_{2,2}=\frac{10}{11},\\
&\gamma_{1,3}=\frac{1}{111},\quad \gamma_{2,3}=\frac{10}{111},\quad \gamma_{3,3}=\frac{100}{111},\\
&\gamma_{1,4}=\frac{1}{1111},\quad \gamma_{2,4}=\frac{10}{1111},\quad \gamma_{3,4}=\frac{100}{1111},\quad \gamma_{4,4}=\frac{1000}{1111},\\
&\gamma_{1,5}=\frac{1}{11111},\quad \gamma_{2,5}=\frac{10}{11111},\quad \gamma_{3,5}=\frac{100}{11111},\quad \gamma_{4,5}=\frac{1000}{11111},\quad \gamma_{5,5}=\frac{10000}{11111}.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

利用 (2.8) 计算定义在不等距中心模板上的多项式的光滑指示器 β_k, $k=2,\ldots,5$, 其中 β_1 的计算方法为

$$\varsigma_0=(\bar{u}_i-\bar{u}_{i-1})^2, \tag{4.4}$$

$$\varsigma_1=(\bar{u}_{i+1}-\bar{u}_i)^2, \tag{4.5}$$

$$\tilde{\gamma}_{0,1}=\begin{cases}1, & \varsigma_0\geqslant\varsigma_1,\\ 10, & \text{其他},\end{cases} \tag{4.6}$$

$$\tilde{\gamma}_{1,1}=11-\tilde{\gamma}_{0,1}, \tag{4.7}$$

$$\gamma_{0,1}=\frac{\tilde{\gamma}_{0,1}}{\tilde{\gamma}_{0,1}+\tilde{\gamma}_{1,1}}, \tag{4.8}$$

$$\gamma_{1,1}=1-\gamma_{0,1}, \tag{4.9}$$

$$\sigma_0=\gamma_{0,1}\left(1+\frac{|\varsigma_0+\varsigma_1|^k}{\varsigma_0+\epsilon}\right), \tag{4.10}$$

$$\sigma_1 = \gamma_{1,1}\left(1 + \frac{|\varsigma_0 + \varsigma_1|^k}{\varsigma_1 + \epsilon}\right), \tag{4.11}$$

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_1, \tag{4.12}$$

这里, $k = 1, \dots, 4$ 分别对应了定义在模板 $S_2, \dots, S_5$ 上的非齐次多项式, ϵ 定义为某个较小的正数以避免分母出现 0 的情形. 进一步分析有

$$\beta_1 = \frac{1}{\sigma^2}(\sigma_0(\bar{u}_i - \bar{u}_{i-1}) + \sigma_1(\bar{u}_{i+1} - \bar{u}_i))^2. \tag{4.13}$$

定义

$$\tau_k = \left(\frac{\sum_{t=1}^{k-1} |\beta_k - \beta_t|}{k-1}\right)^{k-1}, \quad k = 2, \dots, 5. \tag{4.14}$$

非线性权的计算公式为

$$\omega_{l,k} = \frac{\bar{\omega}_{l,k}}{\sum_{t=1}^{k} \bar{\omega}_{t,k}}, \quad \bar{\omega}_{l,k} = \gamma_{l,k}\left(1 + \frac{\tau_k}{\epsilon + \beta_l}\right), \quad l = 1, \dots, k, \quad k = 2, \dots, 5. \tag{4.15}$$

最终可得对应三、五、七和九阶精度的空间离散为

$$u^-_{i+1/2} \approx \sum_{l=1}^{k} \omega_{l,k} p_l(x_{i+1/2}), \quad k = 2, \dots, 5. \tag{4.16}$$

上面主要介绍了 MR-WENO 格式的高精度空间离散, 在实际使用中还需要使用三阶 TVD Runge-Kutta 方法 (2.11) 对常微分方程进行时间离散得到全离散格式.

注意, 在上面的构造过程中, 使用通量分裂后的节点值信息 f_j^+ 替换网格均值 $\bar{u}_j$ 保持模板上的多项式的表达式不变, 再利用相同的方法构造线性权、光滑指示器和非线性权以及时间离散方法可以得到相应的三、五、七和九阶有限差分 MR-WENO 格式.

高精度 MR-WENO 格式所用空间模板较少, 因而在非结构网格上具有很大的优势性. 如表 1 所示, 不论在三角形网格还是四面体网格情形下, 有限体积 MR-WENO 格式都只需要 3 个模板就可以实现经典的三阶有限体积 WENO 格式多达十几个模板才可以达到的数值精度, 因此编程效率和计算效率均可得到较大提高.

与经典 WENO 格式相比, 新型有限差分和有限体积 MR-WENO 格式不仅所用空间模板的数量较少, 而且不依赖于计算网格的空间拓扑结构, 线性权可以取任意和为 1 的正值且与目标单元上的求积节点无关, 并且在解的光滑区域局部极值点处不降阶. 该格式的重构多项式是不同次多项式的凸组合, 这样的设计易于编程实现且使格式的收敛性和鲁棒性较好, 可用于单一函数空间或任意混合函数空间的高精度空间离散并可用于定常问题和非定常问题的高精度数值模拟. 其中 MR-WENO 格式对于非定常涡结构的捕捉效果较好且激波分辨率更高. 例如, MR-WENO 格式对于定常的超声速平板绕流问题、超声速圆柱绕流问题、跨声速翼型绕流问题和三维外形绕流问题等具有较好的定常收敛性,

表 1　模板数据比较表

网格类型	经典三阶 WENO 格式	三阶 US-WENO 格式	三阶 MR-WENO 格式
三角形网格	9 个模板	5 个模板	3 个模板
四面体网格	17 个模板	6 个模板	3 个模板

物理量的残差可收敛至机器零附近. 而且高精度有限差分 MR-WENO 格式也可以用于求解一些低密度、低压强或低能量的极端问题, 如对 LeBlanc 问题、后台阶问题、80 Mach 天体射流问题和 2,000 Mach 天体射流问题等都有着较好的高精度数值求解效果. 目前 MR-WENO 格式已被用于多个领域的研究, 并获得了一些较好的数值计算结果. Li 等 [44] 采用 MR-WENO 格式建立了求解 Hamilton-Jacobi 方程的高阶任意 Lagrangian-Eulerian (arbitrary Lagrangian-Eulerian, ALE) 有限差分 WENO 格式. Zhu 等 [101] 提出了一种新的高阶有限体积 MR-WENO 格式并用于求解三角形网格上的双曲守恒律方程. Boscheri 和 Balsara [7] 提出了一个守恒的 WENO 自适应阶重构算子并将其应用于显式单步 ALE 间断 Galerkin 方法. Zhu 等 [100] 设计了一种新型 MR-WENO 限制器并用于高阶 Runge-Kutta 间断 Galerkin (Runge-Kutta discontinuous Galerkin, RKDG) 方法的计算. Zhang 等 [83] 利用一阶、三阶和五阶精度的 3 个嵌套中心空间子模板上的多项式构造了一个新的五阶多分辨率加权紧致非线性格式 (weighted compact nonlinear scheme, WCNS). Wang 和 Zhu [78] 设计了一种新型高阶有限差分多分辨率三角函数加权本质无振荡 (trigonometric weighted essentially non-oscillatory, TWENO) 格式用于求解双曲守恒律和一些标准的高频振荡问题. Zhu 和 Shu [105] 在四面体网格上设计了一种新的三阶有限体积 MR-WENO 格式用于求解双曲守恒律. Zhu 和 Shu [104] 及 Zhu 等 [106] 针对三角形网格上的双曲守恒律方程设计了带 MR-WENO 限制器的高阶 RKDG 方法. 这个方法是将结构网格上有限体积 MR-WENO 格式推广到三角形网格并作为 RKDG 方法的一个非线性限制器. Wang 等 [80] 在结构网格上设计了一个新的五阶有限差分 MR-WENO 格式用于求解一维和二维有源项和无源项的浅水波方程. Jiang [34] 提出了一种新的有限差分 MR-WENO 格式用于求解可能含有非光滑解的非线性退化抛物型方程. Rehman 等 [66] 构造了求解一维、二维 Ripa 模型的五阶平衡有限体积 MR-WENO 格式. Wang 等 [79] 建立了一类在结构网格上求解双曲守恒律方程的高效和高精度的有限差分嵌套 MR-WENO 格式. Lu 等 [52] 利用 MR-WENO 格式的设计思想重新考虑求解双曲守恒律方程的数值边界处理方法的逆 Lax-Wendroff (inverse Lax-Wendroff, ILW) 过程, 并提出了一种计算镜像点值的新方法. Zhu 等 [108] 在三角形网格上的 RKDG 方法限制器的基础上设计了四面体网格上带有 MR-WENO 限制器的二阶和三阶 RKDG 方法. Ahmed 等 [2] 发展了五阶有限体积 MR-WENO 格式用于求解恒温半导体器件的一维非线性黏性量子流体动力学方程. Zhu 等 [100] 利用高阶有限体积 MR-WENO 作为限制器建立了 RKDG 方法用于定常问题的高精度数值模拟, 以避免经典 WENO 格式可能会出现的伪振荡导致残差难以收敛到机器零附近. Li 等 [41] 在 HWENO 格式的基础上设计了一种新型高阶有限体积和有限差分多分辨率 Hermite WENO (multi-resolution Hermite WENO, MR-HWENO) 格式用于求解结构网格上的双曲守恒律, 这是对传统 HWENO 格式的一种拓展. Cheng 等 [10] 通过引入新的非线性加权机制改进了三阶混合网格边界和网格节点的 Hermite 加权紧致非线性格式 (Hermite weighted compact nonlinear scheme, HWCNS) 并用于复杂流体的模拟. Lin 等 [47] 针对含有高阶导数并可能存在尖峰解和强激波的 DP (Degasperis-Procesi) 和 μDP 方程设计了两种具有不等距子模板的有限差分 WENO 格式来处理强间断问题. Kumar 和 Chandrashekar [36] 基于 MR-WENO 格式的设计思想针对 Euler 方程提出了两种新的多层次格式算法, 在保持精度和分辨率的同时降低计算量. 第一种算法包含了坏网格的识别程序, 在坏网格上使用特征分解的 WENO 重构思想, 在光滑区域使用特征分解的 WENO 重构思想. 第二个算法是在解的光滑区域使用迎风性的有限差分格式. Li 等 [45] 提出了一类新的高阶快速多分辨率本质无振荡 (fast multi-resolution ENO, FMRENO) 格式. 格式中包含了一种新的候选模板的排列策略, 设计了单调性保持 (monotonicity preserving, MP) 限制器并建立了一种新的多分辨率模板的选择策略. 随着 WENO 格式的广泛应用和快速发展, MR-WENO 格式将会在更多领域中发挥一定作用并产生一些新的研究成果.

5 HWENO 格式

Qiu 和 Shu [61–63] 基于 WENO 格式首次发展了一类有限体积 HWENO 格式. 因为有限体积 WENO 格式在计算时随着数值精度的提高需要采用更宽和更大的空间模板, 所以这种空间离散方法会迅速增大计算开销并导致实际应用中计算程序的执行效率较低. 新型有限体积 HWENO 格式与有限体积 WENO 格式相比, 在重构时同时考虑了单元平均值和导数的信息, 因此在相同精度的情形下 HWENO 格式空间模板更紧致且使物理边界条件的处理更加容易, 同时也使数值解在计算区域内具有更高的激波分辨率. 下面以一维标量守恒律方程为例来简要介绍有限体积 HWENO 格式的构造流程.

令 $v = u_x$, 则 $g(u,v) = f'(u)u_x = f'(u)v$. 对 (2.1) 求导后有

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0, \quad u(x,0) = u_0(x), \\ v_t + g(u,v)_x = 0, \quad v(x,0) = v_0(x). \end{cases} \tag{5.1}$$

定义网格上的单元平均值为

$$\overline{u}_i(t) = \frac{1}{h}\int_{I_i} u(x,t)dx, \quad \overline{v}_i(t) = \frac{1}{h}\int_{I_i} v(x,t)dx. \tag{5.2}$$

进一步地, 可得如下守恒形式:

$$\begin{cases} \dfrac{d\overline{u}_i}{dt} = -\dfrac{1}{h}(\hat{f}_{i+1/2} - \hat{f}_{i-1/2}), \\ \dfrac{d\overline{v}_i}{dt} = -\dfrac{1}{h}(\hat{g}_{i+1/2} - \hat{g}_{i-1/2}), \end{cases} \tag{5.3}$$

数值通量为

$$\hat{f}_{i+1/2} = \hat{f}(u^-_{i+1/2}, u^+_{i+1/2}), \tag{5.4}$$

$$\hat{g}_{i+1/2} = \hat{g}(u^-_{i+1/2}, u^+_{i+1/2}; v^-_{i+1/2}, v^+_{i+1/2}), \tag{5.5}$$

其中 $u^{\pm}_{i+1/2}$ 和 $v^{\pm}_{i+1/2}$ 是点值 $u(x_{i+1/2},t)$ 和 $v(x_{i+1/2},t)$ 的数值近似. 利用 Lax-Friedrichs 方法进行通量分裂:

$$\hat{f}(a,b) = \frac{1}{2}[f(a) + f(b) - \alpha(b-a)], \tag{5.6}$$

$$\hat{g}(a,b;c,d) = \frac{1}{2}[g(a,c) + g(b,d) - \alpha(d-c)], \tag{5.7}$$

其中, $\alpha = \max_{u\in D}|f'(u)|$, $D = [\min(a,b), \max(a,b)]$. 为了得到数值通量的高阶近似, 用 $\{\bar{u}_i, \bar{v}_i\}$ 重构点值 $\{u^{\pm}_{i+1/2}, v^{\pm}_{i+1/2}\}$.

利用 $\{\bar{u}_i, \bar{v}_i\}$ 来重构 $u^-_{i+1/2}$. 取小模板 $S_0 = \{I_{i-1}, I_i\}$、$S_1 = \{I_i, I_{i+1}\}$ 和大模板 $S = \{I_{i-1}, I_i, I_{i+1}\}$, 利用模板上的单元平均值和导数的单元平均值重构 3 个二次多项式 $p_0(x)$、$p_1(x)$、$p_2(x)$ 和 1 个四次

多项式 $p(x)$. 这些多项式需要满足以下条件:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{h}\int_{I_{i+j}} p_0(x)dx = \overline{u}_{i+j}, \quad j=-1,0, \quad \frac{1}{h}\int_{I_{i-1}} p_0'(x)dx = \overline{v}_{i-1},\\
&\frac{1}{h}\int_{I_{i+j}} p_1(x)dx = \overline{u}_{i+j}, \quad j=0,1, \quad \frac{1}{h}\int_{I_{i+1}} p_1'(x)dx = \overline{v}_{i+1},\\
&\frac{1}{h}\int_{I_{i+j}} p_2(x)dx = \overline{u}_{i+j}, \quad j=-1,0,1,\\
&\frac{1}{h}\int_{I_{i+j}} p(x)dx = \overline{u}_{i+j}, \quad j=-1,0,1, \quad \frac{1}{h}\int_{I_{i+j}} p'(x)dx = \overline{v}_{i+j}, \quad j=-1,1.
\end{aligned}
\tag{5.8}
$$

由关系

$$
p(x_{i+1/2}) = \sum_{j=0}^{2} \gamma_j p_j(x_{j+1/2}) \tag{5.9}
$$

可确定最优的线性权为

$$
\gamma_0 = \frac{9}{80}, \quad \gamma_1 = \frac{21}{40}, \quad \gamma_2 = \frac{29}{80}. \tag{5.10}
$$

应用第 2 节中介绍的 WENO-JS 格式 [32,73] 中计算光滑指示器和非线性权的公式可得 $u_{i+1/2}^-$ 的高阶近似为

$$
u_{i+1/2}^- \approx \sum_{j=0}^{2} \omega_j p_j(x_{i+1/2}). \tag{5.11}
$$

利用 $\{\bar{u}_i, \bar{v}_i\}$ 来重构 $v_{i+1/2}^-$. 取小模板 $S_0 = \{I_{i-1}, I_i\}$、$S_1 = \{I_i, I_{i+1}\}$ 和大模板 $S = \{I_{i-1}, I_i, I_{i+1}\}$, 利用模板上的单元平均值和导数的单元平均值重构 3 个三次多项式 $q_0(x)$、$q_1(x)$、$q_2(x)$ 和 1 个五次多项式 $q(x)$. 这些多项式需要满足以下条件:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{h}\int_{I_{i+j}} q_0(x)dx = \overline{u}_{i+j}, \quad \frac{1}{h}\int_{I_{i+j}} q_0'(x)dx = \overline{v}_{i+j}, \quad j=-1,0,\\
&\frac{1}{h}\int_{I_{i+j}} q_1(x)dx = \overline{u}_{i+j}, \quad \frac{1}{h}\int_{I_{i+j}} q_1'(x)dx = \overline{v}_{i+j}, \quad j=0,1,\\
&\frac{1}{h}\int_{I_{i+j}} q_2(x)dx = \overline{u}_{i+j}, \quad j=-1,0,1, \quad \frac{1}{h}\int_{I_{i}} q_2'(x)dx = \overline{v}_{i},\\
&\frac{1}{h}\int_{I_{i+j}} q(x)dx = \overline{u}_{i+j}, \quad \frac{1}{h}\int_{I_{i+j}} q'(x)dx = \overline{v}_{i+j}, \quad j=-1,0,1.
\end{aligned}
\tag{5.12}
$$

可确定最优的线性权为

$$
\gamma_0' = \frac{1}{18}, \quad \gamma_1' = \frac{15}{18}, \quad \gamma_2' = \frac{2}{18}. \tag{5.13}
$$

在计算光滑指示器和非线性权后得到 $v_{i+1/2}^-$ 的高阶近似为

$$
v_{i+1/2}^- \approx \sum_{j=0}^{2} \omega_j' q_j'(x_{i+1/2}). \tag{5.14}
$$

再利用显式 SSP Runge-Kutta 方法离散常微分方程 (5.3), 可以得到 (5.1) 的全离散格式.

与经典 WENO 格式 [32, 73] 相比, 高精度有限体积 HWENO 格式因为采用单元平均值和导数的单元平均值, 所以可在实现相同数值精度时采用较少的空间单元个数, 因此模板非常紧凑且数值误差较小并适用于对复杂流体的高精度数值计算. 近年来, Qiu 和 Shu [65] 提出的 HWENO 格式在工程领域中得到了广泛应用并针对各种实际需要进行了改进和优化. 由于在数值解的强间断附近导数值会出现激烈的变化, Zhu 和 Qiu [92] 采用一种新的导数重构方法能较好地解决原来的 HWENO 格式不能求解双 Mach 反射问题和前台阶问题等难点. Liu 和 Qiu [48, 49] 在有限体积 HWENO 格式的基础上构造了一类有限差分 HWENO 格式. Zhao 等 [87] 采用杂交的 HWENO 格式来修正间断点附近的一阶矩并在光滑区域使用高阶线性格式求解 Euler 方程. Zhao 和 Qiu [88] 利用 US-WENO 格式的构造思想对杂交的 HWENO 格式进行了改进. Li 等 [41] 基于 MR-WENO 格式的框架利用中心空间模板的层次结构, 构造了一类新型多分辨率 HWENO 格式. Zhang 和 Zhao [84] 针对一维和二维双曲守恒律方程提出了一种结合限制器的五阶有限差分 HWENO 格式. HWENO 格式作为一种新型高精度激波捕捉格式在高精度数值格式限制器的设计中有着较好的运用. Qiu 和 Shu [65] 最初提出的有限体积 HWENO 格式就是用于 DG 方法的非线性限制器的构造. 根据守恒型方程中物理量需要保持守恒性的要求, 需要确保坏单元 (troubled-cell) 上数值解的单元平均值不变的同时保证修正过的数值解与原有的 DG 方法的数值解在光滑区域具有相同的数值精度且在强间断附近保持本质无振荡的性质. 近年来, Qiu、Shu 和 Zhu 一直致力于 DG 方法的高精度限制器的研究工作, 提出并发展了一系列兼具高精度、强稳健和空间紧致特性的 WENO 限制器 [61, 62, 64, 91, 94, 98, 101, 102, 106–109]. 此外, 高精度 HWENO 格式在气体动理学格式 (gas-kinetic scheme, GKS) 中也有着较好的应用: Ji 等 [31] 针对 Euler 方程和 Navier-Stokes 方程利用 HWENO 限制器构造了紧致的四阶 GKS 格式; Li 等 [43] 设计了带有 HWENO 限制器的五阶紧致 GKS 格式用于求解可压缩流 Euler 方程. HWENO 格式也被用于解决一些特殊的流动问题: Lin 等 [46] 利用 HWENO 格式发展了一种高阶残差分布方法来求解稳态守恒律问题; Zhao 和 Zhang [89] 提出了一个平衡的五阶有限差分 HWENO 格式并用于求解预平衡形式下具有非平底地形的浅水波方程. HWENO 格式在这些高精度数值格式的构造和工程应用中均取得了较好的效果.

6 结论

本文阐述了高精度 WENO 格式的发展历史并简单回顾了经典 WENO 格式 [32, 73] 的构造策略, 分析了高精度 US-WENO 格式 [95–99]、MR-WENO 格式 [102, 103, 105] 和 HWENO 格式 [61–63] 的构造步骤, 讨论了这些新型高精度 WENO 格式在不同领域中的应用. 这些新型 WENO 格式可以在多维情形下保持物理量的守恒性和计算格式的鲁棒性, 可以在解的光滑区域保持计算格式的高阶数值精度同时在强激波或接触间断区域保持本质无振荡的性质. 这些 WENO 格式具有较强的大规模工程应用前景, 能在结构网格、非结构网格、混合网格、运动网格和自适应网格等情形下灵活使用, 且对计算网格的质量要求较低, 易于编程实现, 非常适用于求解同时包含强激波或其他不连续性和复杂光滑波系结构的问题. 这些高精度 WENO 格式已经广泛应用于计算流体力学、磁流体力学、计算宇宙学、半导体器件模拟、交通流模型和计算生物学等领域并具有较广泛的军事和工程应用前景. 高精度 WENO 格式的未来发展在算法方面更注重执行效率以及在军用和商用软件中的实际应用性, 易编程实现, 易操作性, 能更好地处理复杂流体问题 (如稀薄流和湍流问题等). Zhu 等近期已经在 WENO 格式研究上取得一些新的进展, 在高精度 WENO 格式的新型混合策略、新型保正性策略和 MR-WENO 格式的

自适应线性权等研究方面上也有一些成果, 这些新的思想和方法将会推动高精度有限差分和有限体积 WENO 格式在更多工程领域中具有较好的应用前景.

参考文献

1 Abgrall R. Numerical discretization of the first-order Hamilton-Jacobi equation on triangular meshes. Comm Pure Appl Math, 1996, 49: 1339–1373

2 Ahmed T, Rehman A, Ali A, et al. A high order multi-resolution WENO numerical scheme for solving viscous quantum hydrodynamic model for semiconductor devices. Results Phys, 2021, 23: 104078

3 Balsara D S, Garain S, Florinski V, et al. An efficient class of WENO schemes with adaptive order for unstructured meshes. J Comput Phys, 2020, 404: 109062

4 Balsara D S, Garain S, Shu C W. An efficient class of WENO schemes with adaptive order. J Comput Phys, 2016, 326: 780–804

5 Balsara D S, Shu C W. Monotonicity preserving weighted essentially non-oscillatory schemes with increasingly high order of accuracy. J Comput Phys, 2000, 160: 405–452

6 Borges R, Carmona M, Costa B, et al. An improved weighted essentially non-oscillatory scheme for hyperbolic conservation laws. J Comput Phys, 2008, 227: 3191–3211

7 Boscheri W, Balsara D S. High order direct arbitrary-Lagrangian-Eulerian (ALE) P_nP_m schemes with WENO adaptive-order reconstruction on unstructured meshes. J Comput Phys, 2019, 398: 108899

8 Capdeville G. A central WENO scheme for solving hyperbolic conservation laws on non-uniform meshes. J Comput Phys, 2008, 227: 2977–3014

9 Castro M, Costa B, Don W S. High order weighted essentially non-oscillatory WENO-Z schemes for hyperbolic conservation laws. J Comput Phys, 2011, 230: 1766–1792

10 Cheng M, Tang L, Liu Y, et al. An improved third-order HWCNS for compressible flow simulation on curvilinear grids. Adv Aerodyn, 2021, 3: 32

11 Cockburn B, Shu C W. TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws. II. General framework. Math Comp, 1989, 52: 411–435

12 Cockburn B, Shu C W. The Runge-Kutta discontinuous Galerkin method for conservation laws V: Multidimensional systems. J Comput Phys, 1998, 141: 199–224

13 Cockburn B, Shu C W. Runge-Kutta discontinuous Galerkin methods for convection-dominated problems. J Sci Comput, 2001, 16: 173–261

14 Crandall M G, Lions P L. Two approximations of solutions of Hamilton-Jacobi equations. Math Comp, 1994, 43: 1–19

15 Crandall M G, Majda A. Monotone difference approximations for scalar conservation laws. Math Comp, 1980, 34: 1–21

16 Deng F, Han G L, Liu M K, et al. Numerical simulation of the interaction of two shear layers in double backward-facing steps. Phys Fluids, 2019, 31: 056106

17 Deng X, Maekawa H. Compact high-order accurate nonlinear schemes. J Comput Phys, 1997, 130: 77–91

18 Deng X, Zhang H. Developing high-order weighted compact nonlinear schemes. J Comput Phys, 2000, 165: 22–44

19 Dumbser M, Boscheri W, Semplice M, et al. Central weighted ENO schemes for hyperbolic conservation laws on fixed and moving unstructured meshes. SIAM J Sci Comput, 2017, 39: 2564–2591

20 Dumbser M, Käser M. Arbitrary high order non-oscillatory finite volume schemes on unstructured meshes for linear hyperbolic systems. J Comput Phys, 2007, 221: 693–723

21 Fiévet R, Voelkel S, Raman V, et al. Numerical investigation of the coupling of vibrational nonequilibrium and turbulent mixing using state-specific description. Phys Rev Fluids, 2019, 4: 013401

22 Godunov, Sergei K. Different methods for shock waves. PhD Thesis. Moscow: Moscow State University, 1954

23 Godunov, Sergei K. A difference scheme for numerical solution of discontinuous solution of hydrodynamic equations. Mat Sb, 1959, 47: 271–306

24 Goodman J B, LeVeque R J. On the accuracy of stable schemes for 2D scalar conservation laws. Math Comp, 1985, 45: 15–21

25 Hao J, Xiong S, Yang Y. Tracking vortex surfaces frozen in the virtual velocity in non-ideal flows. J Fluid Mech, 2019, 863: 513–544

26 Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. J Comput Phys, 1983, 49: 357–393

27 Harten A, Engquist B, Osher S, et al. Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes, III. J Comput Phys, 1987, 71: 231–303

28 Hejranfar K, Rahmani S. Numerical simulation of shock-disturbances interaction in high-speed compressible inviscid flow over a blunt nose using weighted essentially non-oscillatory scheme. Wave Motion, 2019, 88: 167–195

29 Huang J, Bretzke J V, Duan L. Assessment of turbulence models in a hypersonic cold-wall turbulent boundary layer.

Fluids, 2019, 4: 37
30 Huang Z, Wang H. Linear interaction of two-dimensional free-stream disturbances with an oblique shock wave. J Fluid Mech, 2019, 873: 1179–1205
31 Ji X, Pan L, Shyy W, et al. A compact fourth-order gas-kinetic scheme for the Euler and Navier-Stokes equations. J Comput Phys, 2018, 372: 446–472
32 Jiang G S, Shu C W. Efficient implementation of weighted ENO schemes. J Comput Phys, 1996, 126: 202–228
33 Jiang L I, Shan H, Liu C Q. Weighted compact scheme for shock capturing. Int J Comput Fluid Dyn, 2001, 15: 147–155
34 Jiang Y. High order finite difference multi-resolution WENO method for nonlinear degenerate parabolic equations. J Sci Comput, 2021, 86: 16
35 Kamath A, Fleit G, Bihs H. Investigation of free surface turbulence damping in RANS simulations for complex free surface flows. Water, 2019, 11: 456
36 Kumar R, Chandrashekar P. Multi-level WENO schemes with an adaptive characteristic-wise reconstruction for system of Euler equations. Comput & Fluids, 2022, 239: 105386
37 Lele S K. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution. J Comput Phys, 1992, 103: 16–42
38 LeVeque R J. Numerical Methods for Conservation Laws. Basel: Birkhäuser, 1990
39 Levy D, Puppo G, Russo G. Central WENO schemes for hyperbolic systems of conservation laws. ESAIM Math Model Numer Anal, 1999, 33: 547–571
40 Levy D, Puppo G, Russo G. Compact central WENO schemes for multidimensional conservation laws. SIAM J Sci Comput, 2000, 22: 656–672
41 Li J Y, Shu C W, Qiu J X. Multi-resolution HWENO schemes for hyperbolic conservation laws. J Comput Phys, 2021, 446: 110653
42 Li P, Li C, Wang H, et al. Distribution characteristics and mixing mechanism of a liquid jet injected into a cavity-based supersonic combustor. Aerospace Sci Tech, 2019, 94: 105401
43 Li S Y, Luo D M, Qiu J X, et al. A compact and efficient high-order gas-kinetic scheme. J Comput Phys, 2021, 447: 110661
44 Li Y, Cheng J, Xia Y H, et al. High order arbitrary Lagrangian-Eulerian finite difference WENO scheme for Hamilton-Jacobi equations. Commun Comput Phys, 2019, 26: 1530–1574
45 Li Y, Fu L, Adams N A. A family of fast multi-resolution ENO schemes for compressible flows. J Sci Comput, 2023, 94: 44
46 Lin J F, Ren Y, Abgrall R, et al. High order residual distribution conservative finite difference HWENO scheme for steady state problems. J Comput Phys, 2022, 457: 111045
47 Lin J F, Xu Y, Xue H, et al. High order finite difference WENO methods with unequal-sized sub-stencils for the Degasperis-Procesi type equations. Commun Comput Phys, 2022, 31: 913–946
48 Liu H, Qiu J X. Finite difference Hermite WENO schemes for hyperbolic conservation laws. J Sci Comput, 2015, 63: 548–572
49 Liu H, Qiu J X. Finite difference Hermite WENO schemes for conservation laws, II: An alternative approach. J Sci Comput, 2016, 66: 598–624
50 Liu X D, Osher S, Chan T. Weighted essentially non-oscillatory schemes. J Comput Phys, 1994, 115: 200–212
51 Lu C, Xie L, Yang H. The simple finite volume Lax-Wendroff weighted essentially nonoscillatory schemes for shallow water equations with bottom topography. Math Probl Eng, 2018, 2018: 1–15
52 Lu J, Shu C W, Tan S, et al. An inverse Lax-Wendroff procedure for hyperbolic conservation laws with changing wind direction on the boundary. J Comput Phys, 2021, 426: 109940
53 Mahesh K, Lele S K, Moin P. The influence of entropy fluctuations on the interaction of turbulence with a shock wave. J Fluid Mech, 1997, 334: 353–379
54 Mo H, Lien F S, Zhang F, et al. A mesoscale study on explosively dispersed granular material using direct simulation. J Appl Phys, 2019, 125: 214302
55 Osher S, Chakravarthy S. High resolution schemes and the entropy condition. SIAM J Numer Anal, 1984, 21: 955–984
56 Osher S, Chakravarthy S. Very high order accurate TVD schemes. In: Oscillation Theory, Computation, and Methods of Compensated Compactness. The IMA Volumes in Mathematics and Its Applications, vol. 2. New York: Springer, 1986, 229–274
57 Ou J, Chen J. DSMC data-improved numerical simulation of hypersonic flow past a flat plate in near-continuum regime. Comput & Fluids, 2019, 194: 104308
58 Ou J, Zhai Z. Effects of aspect ratio on shock-cylinder interaction. Acta Mech Sin, 2019, 35: 61–69
59 Puppo G, Russo G. Staggered finite difference schemes for conservation laws. J Sci Comput, 2006, 27: 403–418
60 Qiu J X, Shu C W. On the construction, comparison, and local characteristic decomposition for high-order central WENO schemes. J Comput Phys, 2002, 183: 187–209
61 Qiu J X, Shu C W. Hermite WENO schemes and their application as limiters for Runge-Kutta discontinuous Galerkin method: One-dimensional case. J Comput Phys, 2003, 193: 115–135

62 Qiu J X, Shu C W. Hermite WENO schemes and their application as limiters for Runge-Kutta discontinuous Galerkin method II: Two dimensional case. Comput & Fluids, 2005, 34: 642–663
63 Qiu J X, Shu C W. Hermite WENO schemes for Hamilton-Jacobi equations. J Comput Phys, 2005, 204: 82–99
64 Qiu J X, Shu C W. Runge-Kutta discontinuous Galerkin method using WENO limiters. SIAM J Sci Comput, 2005, 26: 907–929
65 Qiu J X, Shu C W. A comparison of troubled-cell indicators for Runge-Kutta discontinuous Galerkin methods using weighted essentially nonoscillatory limiters. SIAM J Sci Comput, 2005, 27: 995–1013
66 Rehman A, Ali I, Zia S, et al. Well-balanced finite volume multi-resolution schemes for solving the Ripa models. Adv Mech Eng, 2021, 13: 168781402110034
67 Ren Y, Xiong T, Qiu J X. A hybrid finite difference WENO-ZQ fast sweeping method for static Hamilton-Jacobi equations. J Sci Comput, 2020, 83: 54
68 Shahmardi A, Zade S, Ardekani M N, et al. Turbulent duct flow with polymers. J Fluid Mech, 2019, 859: 1057–1083
69 Sharma S, Shadloo M S, Hadjadj A. Turbulent flow topology in supersonic boundary layer with wall heat transfer. Internat J Heat Fluid Flow, 2019, 78: 108430
70 Shi J, Hu C, Shu C W. A technique of treating negative weights in WENO schemes. J Comput Phys, 2002, 175: 108–127
71 Shi M, Xu L, Wang Z, et al. Effect of a roughness element on the hypersonic boundary layer receptivity due to different types of free-stream disturbance with a single frequency. Entropy, 2019, 21: 255
72 Shu C W. TVB uniformly high-order schemes for conservation laws. Math Comp, 1987, 49: 105–121
73 Shu C W. Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes for hyperbolic conservation laws. In: Cockburn B, Johnson C, Shu C W, et al., eds. Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1697. Berlin: Springer, 1998, 325–432
74 Shu C W, Osher S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes. J Comput Phys, 1988, 77: 439–471
75 Shu C W, Osher S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes, II. J Comput Phys, 1989, 83: 32–78
76 Toro E. Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics: A Practical Introduction. Berlin-Heidelberg: Springer, 1997
77 Vevek U S, Zang B, New T H. On alternative setups of the double Mach reflection problem. J Sci Comput, 2019, 78: 1291–1303
78 Wang Y M, Zhu J. A new type of increasingly high-order multi-resolution trigonometric WENO schemes for hyperbolic conservation laws and highly oscillatory problems. Comput & Fluids, 2020, 200: 104448
79 Wang Z M, Zhu J, Yang Y, et al. A class of robust low dissipation nested multi-resolution WENO schemes for solving hyperbolic conservation laws. Adv Appl Math Mech, 2021, 13: 1064–1095
80 Wang Z M, Zhu J, Zhao N. A new fifth-order finite difference well-balanced multi-resolution WENO scheme for solving shallow water equations. Comput Math Appl, 2020, 80: 1387–1404
81 Yang Y, Wang H, Sun M, et al. Numerical investigation of transverse jet in supersonic crossflow using a high-order nonlinear filter scheme. Acta Astronaut, 2019, 154: 74–81
82 Yu R, Lipatnikov A N. Surface-averaged quantities in turbulent reacting flows and relevant evolution equations. Phys Rev E, 2019, 100: 013107
83 Zhang H B, Wang G X, Zhang F. A multi-resolution weighted compact nonlinear scheme for hyperbolic conservation laws. Int J Comput Fluid Dyn, 2020, 34: 187–203
84 Zhang M, Zhao Z. A fifth-order finite difference HWENO scheme combined with limiter for hyperbolic conservation laws. J Comput Phys, 2023, 472: 111676
85 Zhang S, Jiang S, Shu C W. Development of nonlinear weighted compact schemes with increasingly higher order accuracy. J Comput Phys, 2008, 227: 7294–7321
86 Zhang Y, Deng W, Zhu J. A new sixth-order finite difference WENO scheme for fractional differential equations. J Sci Comput, 2021, 87: 73
87 Zhao Z, Chen Y B, Qiu J X. A hybrid Hermite WENO scheme for hyperbolic conservation laws. J Comput Phys, 2020, 405: 109175
88 Zhao Z, Qiu J X. A Hermite WENO scheme with artificial linear weights for hyperbolic conservation laws. J Comput Phys, 2020, 417: 109583
89 Zhao Z, Zhang M. Well-balanced fifth-order finite difference Hermite WENO scheme for the shallow water equations. J Comput Phys, 2023, 475: 111860
90 Zhao Z, Zhu J, Chen Y B, et al. A new hybrid WENO scheme for hyperbolic conservation laws. Comput & Fluids, 2019, 179: 422–436
91 Zhong X, Shu C W. A simple weighted essentially nonoscillatory limiter for Runge-Kutta discontinuous Galerkin methods. J Comput Phys, 2013, 232: 397–415
92 Zhu J, Qiu J X. A class of the fourth order finite volume Hermite weighted essentially non-oscillatory schemes. Sci

China Ser A, 2008, 51: 1549–1560
93 Zhu J, Qiu J X. Runge-Kutta discontinuous Galerkin method using Weno-type limiters: Three-dimensional unstructured meshes. Commun Comput Phys, 2012, 11: 985–1005
94 Zhu J, Qiu J X. WENO schemes and their application as limiters for RKDG methods based on trigonometric approximation spaces. J Sci Comput, 2013, 55: 606–644
95 Zhu J, Qiu J X. A new fifth order finite difference WENO scheme for solving hyperbolic conservation laws. J Comput Phys, 2016, 318: 110–121
96 Zhu J, Qiu J X. A new third order finite volume weighted essentially non-oscillatory scheme on tetrahedral meshes. J Comput Phys, 2017, 349: 220–232
97 Zhu J, Qiu J X. A new type of finite volume WENO schemes for hyperbolic conservation laws. J Sci Comput, 2017, 73: 1338–1359
98 Zhu J, Qiu J X. A new fifth order finite difference WENO scheme for Hamilton-Jacobi equations. Numer Methods Partial Differential Equations, 2017, 33: 1095–1113
99 Zhu J, Qiu J X. New finite volume weighted essentially nonoscillatory schemes on triangular meshes. SIAM J Sci Comput, 2018, 40: 903–928
100 Zhu J, Qiu J X, Shu C W. High-order Runge-Kutta discontinuous Galerkin methods with a new type of multi-resolution WENO limiters. J Comput Phys, 2020, 404: 109105
101 Zhu J, Qiu J X, Shu C W, et al. Runge-Kutta discontinuous Galerkin method using WENO limiters II: Unstructured meshes. J Comput Phys, 2008, 227: 4330–4353
102 Zhu J, Shu C W. A new type of multi-resolution WENO schemes with increasingly higher order of accuracy. J Comput Phys, 2018, 375: 659–683
103 Zhu J, Shu C W. A new type of multi-resolution WENO schemes with increasingly higher order of accuracy on triangular meshes. J Comput Phys, 2019, 392: 19–33
104 Zhu J, Shu C W. Numerical study on the convergence to steady-state solutions of a new class of finite volume WENO schemes: Triangular meshes. Shock Waves, 2019, 29: 3–25
105 Zhu J, Shu C W. A new type of third-order finite volume multi-resolution WENO schemes on tetrahedral meshes. J Comput Phys, 2020, 406: 109212
106 Zhu J, Shu C W, Qiu J X. High-order Runge-Kutta discontinuous Galerkin methods with a new type of multi-resolution WENO limiters on triangular meshes. Appl Numer Math, 2020, 153: 519–539
107 Zhu J, Shu C W, Qiu J X. High-order Runge-Kutta discontinuous Galerkin methods with multi-resolution WENO limiters for solving steady-state problems. Appl Numer Math, 2021, 165: 482–499
108 Zhu J, Shu C W, Qiu J X. High-order Runge-Kutta discontinuous Galerkin methods with a new type of multi-resolution WENO limiters on tetrahedral meshes. Commun Comput Phys, 2021, 29: 1030–1058
109 Zhu J, Zhong X, Shu C W, et al. Runge-Kutta discontinuous Galerkin method using a new type of WENO limiters on unstructured meshes. J Comput Phys, 2013, 248: 200–220

Development and prospect of high-order WENO schemes

Jun Zhu, Chi-Wang Shu & Jianxian Qiu

Abstract The weighted essentially non-oscillatory (WENO) schemes are high-precision numerical methods for solving hyperbolic conservation laws and convection-diffusion equations. The design idea of such WENO schemes is to obtain arbitrary high-order numerical accuracy in smooth regions while maintaining essentially non-oscillatory (ENO) properties near the discontinuities of the solution. The finite difference and finite volume WENO schemes designed with this idea have been widely used in computational fluid dynamics and other fields. In this paper, we first review the basic idea and nature of WENO schemes, briefly introduce some progress of WENO schemes in recent years, and elaborate on the US-WENO (unequal-sized WENO) schemes, MR-WENO (multi-resolution WENO) schemes, and HWENO (Hermite WENO) schemes, respectively. Finally, the research progress of high-order WENO schemes is introduced on structured and unstructured meshes. The application of these high-order WENO schemes in many fields and the development trend in the future are proposed.

Keywords **computational fluid dynamics, ENO scheme, WENO scheme, US-WENO scheme, MR-WENO scheme, HWENO scheme**

MSC(2020) 65M08

doi: 10.1360/SSM-2023-0236