doi:10.6043/j.issn.0438-0479.202305003

加权本质无振荡方法综述

邱建贤,熊　涛*

(厦门大学数学科学学院,福建 厦门 361005)

摘要:高精度加权本质无振荡(weighted essentially non-oscillatory,WENO)格式是求解可压缩双曲守恒律的一类重要的数值格式.它基于有限差分和有限体积两类框架,通过不同模版的非线性加权组合来实现对激波等间断解的高分辨率数值模拟,并克服虚假的数值振荡.近些年来,基于非等距模板和改变加权组合方式从而提高 WENO 格式的鲁棒性和计算效率,高维问题结构和无结构网格的可拓展性,和对稳态问题的快速低残差收敛性仍是 WENO 格式设计的热门研究课题.同时将 WENO 格式和高阶显隐(implicit-explicit,IMEX)Runge-Kutta 时间离散格式结合,应用于极端条件下的复杂流动问题的高效稳健数值模拟也是一个非常活跃的研究方向.我们开展了一系列的高精度 WENO 格式的设计和应用的研究,包括设计了大小非等距模板任意正线性权组合的新型 WENO-ZQ 格式,基于 Hermite 插值或重构的 Hermite WENO (HWENO)格式,和对全速域欧拉、浅水波等方程组一致稳定的渐近保持 WENO 格式等,大大增强了 WENO 型格式的灵活性,也丰富了 WENO 格式的应用领域,将在国防工程、航空航天、天体物理、大气海洋等领域有广阔的应用前景.

关键词:加权本质无振荡方法;Hermite 型加权本质无振荡方法;双曲守恒律;渐近保持

中图分类号:O 241.8　　**文献标志码:**A　　**文章编号:**0438-0479(2023)06-0979-12

1　预备知识

加权本质无振荡(weighted essentially non-oscillatory,WENO)格式是求解双曲守恒律方程的一类重要高精度数值格式.它是在本质无振荡(essentially non-oscillatory,ENO)格式基础上发展而来.这类格式通过不同模板的非线性加权组合,来有效克服间断解附近的数值伪振荡,同时实现对间断解的高分辨率捕捉和对光滑解的高精度求解,在国防工程、航空航天、天体物理、大气海洋等领域获得了广泛的应用.

WENO 格式主要是针对标量双曲方程和双曲方程组来设计,通常采用守恒有限差分或有限体积离散两种框架.在有限差分框架下,数值解是定义在网格中心的格点值,而在有限体积框架下,数值解是定义在每个单元的单元平均值.通过点值或者平均值进行数值流通量重构,得到空间导数算子的守恒差分离散近似.时间离散上,WENO 格式一般采用强稳定保持(strong stability preserving,SSP)的显式高阶多层 Runge-Kutta 方法,这样就得到了一个全离散的数值格式.这种先空间离散,再时间离散的格式,通常称为直线型方法(method of lines),是求解双曲守恒律方程的一种非常常用的框架.1994 年 Liu 等[1]提出了第一个三阶精度的有限体积 WENO 格式.1996 年 Jiang 等[2]将其拓展到有限差分格式并给出了一个一般框架,能由任意($k+1$)阶精度的小模版凸组合得到($2k+1$)阶的高阶近似.文献[2]中提出的五阶有限差分格式是后来应用最为广泛的有限差分 WENO 格式.相比有限体积 WENO 方法,有限差分 WENO 方法基于逐维重构,能方便推广到高维问题,但有限差分方法只能采用一致均匀网格,因此对二维三角网格及更高维问题的非结构网格算法,仍然优先选择有限体积 WENO 格式.

WENO 格式提出以后,由于在大多情况下能获得高精度且稳定的解,获得了很多的应用[3],也激发了众多学者进一步改进和优化 WENO 格式的构造,其中典型的工作包括:1) 改进 WENO 格式非线性权避

收稿日期:2023-05-05　　**录用日期:**2023-11-08

基金项目:国家自然科学基金(11971025);福建省自然科学基金(2023J02003)

通信作者:txiong@xmu.edu.cn

引文格式:邱建贤,熊涛.加权本质无振荡方法综述[J].厦门大学学报(自然科学版),2023,62(6):979-990.

Citation: QIU J X,XIONG T. A brief survey on WENO methods[J]. J Xiamen Univ Nat Sci,2023,62(6):979-990.(in Chinese)

免在极值点附近的掉阶现象[4-8]；2）克服 WENO 格式在一般单元点出现负线性权的问题[9-10]；3）发展更高阶 WENO 格式[11-13]；4）采用非等距子模板代替等距子模板[14-15]；5）基于 Hermite 型或其他紧致型多项式重构的 WENO 格式[16-24]；6）WENO 格式在对流扩散、Hamilton-Jacobi 等其他类型方程中的应用[25-28]；7）基于 Lax-Wendroff、半拉格朗日和隐式等时间离散的 WENO 型格式[29-36]；8）保正保界等保结构 WENO 型格式研究[37-44]，等等. 关于 WENO 格式更多的介绍，可参考文献[45-46].

近些年来我们在非等距模板 WENO 型算法和 Hermite WENO(HWENO)型算法等方面，展开了系列研究，构造了一类简便易实施、稳健高鲁棒、一致高精度且收敛性优异的实用新型 WENO(WENO-ZQ)算法和一类利用导数或矩信息的稳健、紧致、具有更高分辨率的 HWENO 型算法. 另外一方面，将 WENO 型方法和显隐时间离散方法结合应用到全马赫数流多尺度双曲方程组，拓展 WENO 型方法的应用范围，我们也取得了一些成果.

2 实用新型 WENO 算法方法简述

针对经典的 WENO 方法(WENO-JS)线性权依赖于网格拓扑结构以及重构点，使得其线性权可能出现负值或不存在或求解繁琐，难以实际应用于工程复杂流动问题(特别是高雷诺数粘性流动问题)的弊端，Zhu 等[21-22,47-48]构造了一类简便易实施、稳健高鲁棒、一致高精度且收敛性优异的 WENO-ZQ 算法. 相较于 WENO-JS 方法，新型算法打破 WENO-JS 方法等单元数空间模板构造的壁垒，其线性权可任取和为 1 的正数且不依赖于网格拓扑，极大地简化了构造步骤和计算流程，解决了制约 WENO 类算法工程化应用的若干瓶颈问题. 该新型算法和理论已实际应用于核科学的数值模拟及飞行器设计中. 相比于 WENO-JS 方法，WENO-ZQ 方法具备以下优良特性：

1）空间重构多项式的线性权可任取和为 1 的正值，减少了对网格拓扑的紧密依赖，而 WENO-JS 方法的线性权的确定需要求解复杂繁琐的线性代数方程组. 该方法可以显著提高计算效率和稳健性，降低编程难度，减少计算机存储量，且更便于应用到自适应网格和任意拉格朗日-欧拉(arbitrary Lagrange-Euler，ALE)方法等复杂网格体系中.

2）空间模板更为紧致，计算量更小. 如：同等设计三阶精度，在三角形网格上，WENO-JS 方法与 WENO-ZQ 方法所需的空间模板中单元数分别为 9 个和 5 个；而在三维非结构四面体网格上，改进的效果更为显著，所需模板单元数由 17 个减少至 6 个.

3）在计算定常问题时具有优异的收敛性能. WENO-JS 方法的残差始终徘徊在 10^{-3} 左右，而 WENO-ZQ 方法的平方根残差可以收敛到 10^{-13} 左右，确保了数值解的可靠性.

4）具有一定的保正性质. WENO-ZQ 方法无需添加保正限制器即可有效地处理低密度、低压强和低能量等极端问题.

2.1 WENO 格式

下面我们以一维方程为例，简要介绍 WENO 格式的构造. 考虑一维标量守恒律方程

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0, \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases} \tag{1}$$

假设点 x_i 是单元 $I_i = [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$ 的中心. 为方便起见，定义单元长度为 $h = h_i = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}$. 对式(1)在单元 I_i 上积分，得到

$$\frac{\mathrm{d}\bar{u}(x_i,t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{h}(f(u(x_{i+1/2},t)) - f(u(x_{i-1/2},t))) = 0. \tag{2}$$

我们利用数值流通量 $\hat{f}_{i+1/2}$ 逼近式(2)中的通量 $f(u(x_{i+1/2},t))$，得到以下守恒的半离散格式：

$$\frac{\mathrm{d}\bar{u}_i(t)}{\mathrm{d}t} = L(u_i) = -\frac{1}{h}(\hat{f}_{i+1/2} - \hat{f}_{i-1/2}), \tag{3}$$

其中 $\bar{u}(x_i,t) = \frac{1}{h}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(\xi,t)\mathrm{d}\xi$ 是解 u 的单元平均值，数值流通量 $\hat{f}_{i+1/2} = \hat{f}(u^-_{i+1/2}, u^+_{i+1/2})$，而 $u^\pm_{i+1/2}$ 将通过 WENO 重构得到. 数值流通量 $\hat{f}(u^-_{i+1/2}, u^+_{i+1/2})$ 可采用任意的单调数值流通量，常用的有 Lax-Friedrichs 流通量：

$$\hat{f}(a,b) = \frac{1}{2}[f(a) + f(b) - \alpha(b-a)], \tag{4}$$

这里 $\alpha = \max_u |f'(u)|$. 如果我们重构的 $u^\pm_{i+1/2}$ 满足条件 $u^\pm_{i+1/2} = u(x_{i+1/2},t) + O(h^r)$，那么式(3)是式(2)的 r 阶逼近. 而半离散格式(3)可以写成常微分方程组 $\frac{\mathrm{d}U(t)}{\mathrm{d}t} = L(U)$，我们可以采用显式 SSP Runge-Kutta 方法离散该常微分方程组，从而得到式(1)的全离散格式.

2.2 WENO 重构

下面我们以五阶精度为例，描述 WENO-JS 方法和 WENO-ZQ 方法重构的过程.

1）重构模板的选取

(i) WENO-JS:选取 3 个等距小模板 $S_0=\{I_{i-2},I_{i-1},I_i\}$,$S_1=\{I_{i-1},I_i,I_{i+1}\}$,$S_2=\{I_i,I_{i+1},I_{i+2}\}$,及大模板 $S_3=\{S_0,S_1,S_2\}=\{I_{i-2},I_{i-1},I_i,I_{i+1},I_{i+2}\}$.

(ii) WENO-ZQ:选取两个小模板 $S_4=\{I_{i-1},I_i\}$,$S_5=\{I_i,I_{i+1}\}$,及大模板 S_3.

2) 重构逼近多项式

(i) WENO-JS:在 3 个小模板 $S_k,k=0,1,2$ 上分别重构二次多项式 $q_k(x),k=0,1,2$,并在大模板 S_3 重构一个四次多项式 $q_3(x)$,使得

$$\frac{1}{h}\int_{I_j}q_k(x)\mathrm{d}x=\bar{u}_j,j=i-2+k,\cdots,i+k,\quad k=0,1,2;\tag{5}$$

$$\frac{1}{h}\int_{I_j}q_3(x)\mathrm{d}x=\bar{u}_j,j=i-2,\cdots,i+2.\tag{6}$$

(ii) WENO-ZQ:在两个小模板 $S_k,k=4,5$ 上分别重构线性多项式 $q_4(x)$ 和 $q_5(x)$,使得

$$\frac{1}{h}\int_{I_j}q_k(x)\mathrm{d}x=\bar{u}_j,j=i-5+k,i-4+k,\quad k=4,5.\tag{7}$$

3) 计算光滑指示器 $\beta_j,j=0,\cdots,5$,用于衡量在单元 I_i 中代数多项式 $q_j(x)$ 的光滑程度. 光滑指示器 β_j 越小,单元中的代数多项式 $q_j(x)$ 越光滑,我们统一使用 Jiang 等[2]给出的公式计算光滑指示器:

$$\beta_j=\sum_{l=1}^{k}\int_{I_i}h^{2l-1}\left(\frac{\partial^l}{\partial x^l}q_j(x)\right)^2\mathrm{d}x,j=0,\cdots,5,\tag{8}$$

其中 k 是对应的多项式 $q_j(x)$ 的次数. 光滑指示器 β_j 常被写成 $\bar{u}_l,l=i-2,\cdots,i+2$ 的线性组合的二次方形式[2,11,47].

4) 计算线性权

(i) WENO-JS:在不同的重构点 x_G,比如 $x_G=x_{i+1/2}$ 上计算 $\gamma_0,\gamma_1,\gamma_2$ 使得

$$q_3(x_G)=\gamma_0q_0(x_G)+\gamma_1q_1(x_G)+\gamma_2q_2(x_G),\tag{9}$$

这里的线性权 $\gamma_0,\gamma_1,\gamma_2$ 依赖于网格的拓扑关系及重构点 x_G. 由于式(9)需对任意的函数 u 都成立,因此,式(9)演变为关于 3 个线性权的一个具有 5 个方程的线性方程组. 对于均匀网格即 $h_i=h$,该方程组具有唯一解,3 个线性权均为正数,且 3 个线性权的和等于 1. 但对于非均匀网格的情况,该方程组依赖于网格的拓扑结构,其解有可能出现负数,甚至不存在. 在实际应用中,为了格式的稳定性,要求线性权均为正数,为了保障线性权均为正数,就要求网格剖分要接近于均匀剖分.

(ii) WENO-ZQ:可以选取任意的正的线性权 γ_3,γ_4,γ_5,仅要求 $\gamma_3+\gamma_4+\gamma_5=1$,然后将 $q_3(x)$ 改写为

$$q_3(x)=\gamma_3\left(\frac{1}{\gamma_3}q_3(x)-\frac{\gamma_4}{\gamma_3}q_4(x)-\frac{\gamma_5}{\gamma_3}q_5(x)\right)+\gamma_4q_4(x)+\gamma_5q_5(x).\tag{10}$$

5) 计算非线性权

(i) WENO-JS:利用所求的线性权和指示器计算非线性权 $\omega_l,l=0,1,2$[2]:

$$\omega_l=\frac{\bar{\omega}_l}{\sum_{k=0}^{2}\bar{\omega}_k},\bar{\omega}_l=\frac{\gamma_l}{(\beta_l+\varepsilon)^2},l=0,1,2,\tag{11}$$

其中 ε 是一个很小的正数,比如取 $\varepsilon=10^{-6}$,其作用是可避免在非线性权的计算过程中出现分母为零.

(ii) WENO-ZQ:利用所求的线性权和指示器计算非线性权 $\omega_l,l=3,4,5$[21,47]:首先定义 τ 为 β_3,β_4 和 β_5 之间差距的绝对值

$$\tau=(|\beta_3-\beta_4|+|\beta_3-\beta_5|)^2,$$

从而

$$\omega_l=\frac{\bar{\omega}_l}{\sum_{k=3}^{5}\bar{\omega}_k},\bar{\omega}_l=\gamma_l\left(1+\frac{\tau}{\varepsilon+\beta_l}\right),l=3,4,5.\tag{12}$$

6) 计算最终重构点值:

(i) WENO-JS:将式(9)中的线性权替换为非线性权(11),我们得到逼近 $u(x_G,t)$ 的重构点值. 比如 $x_G=x_{i+1/2}$ 时,我们得到

$$u_{i+1/2}^-=\omega_0q_0(x_{i+1/2})+\omega_1q_1(x_{i+1/2})+\omega_2q_2(x_{i+1/2}).$$

(ii) WENO-ZQ:将式(10)中的线性权替换为非线性权(12),我们得到 $u(x,t)$ 在单元 I_i 的逼近多项式 $Q(x)$:

$$Q(x)=\omega_3\left(\frac{1}{\gamma_3}q_3(x)-\frac{\gamma_4}{\gamma_3}q_4(x)-\frac{\gamma_5}{\gamma_3}q_5(x)\right)+\omega_4q_4(x)+\omega_5q_5(x),$$

当 $x=x_{i+1/2}$ 或 $x=x_{i-1/2}$ 时,我们分别得到:

$$u_{i+1/2}^-=Q(x_{i+1/2}),u_{i-1/2}^+=Q(x_{i-1/2}).$$

在这里我们可以看到,WENO-JS 重构过程中,对于每个重构点,我们都需要计算一组线性权以及相应的非线性权,而 WENO-ZQ 重构过程中,我们则仅计算一次非线性权,从而得到在单元 I_i 的逼近多项式 $Q(x)$,最后利用逼近多项式求出每个重构点的逼近值.

3　Hermite WENO 方法简述

在设计更高精度的 WENO 格式时,必须使用更宽的重构模板,这给该方法的应用带来了一定的困难. 因此,为了平衡 WENO 格式的精度与重构模板的紧致性之间的矛盾,Qiu 等[49-50]基于 WENO 格式首次发展了一类五阶的新型有限体积格式,并命名为 Hermite WENO(HWENO)格式. 该格式的主要思想

便是在重构数值流通量时同时使用了数值解及其导数的信息,因此在实现相同精度的情形下,HWENO格式更加紧致,而更紧致的模板会使边界更容易处理,同时也会使格式具有更高的分辨率. 初始的HWENO格式[49-50]首先对原方程(组)的空间自变量求导,得到一个关于原函数导数的方程(组),进而利用原方程(组)和辅助方程(组)分别得到的函数值本身和它的一阶导数,从而利用Hermite插值方法得到预期设计精度的HWENO格式. 相比于需要5点信息的经典五阶WENO格式,我们提出的五阶HWENO方法只需3个点. 可以看出新的HWENO格式在保证数值精度的同时减少了所需单元信息,较好地保证了数值方法的紧凑性,并且在激波附近具有无振荡特性和高分辨率. 但是由于微分方程的解存在间断,从而在解间断的附近导数会出现激烈的变化,导致其在模拟一些标准算例时(如双马赫问题和前台阶问题)仍然存在一些问题,该问题后来被Zhu等[19]通过使用另外一类重构导数项的方法解决. 之后,Liu等[20,51]构造了一类有限差分HWENO格式,但是其必须使用额外的流通量保正限制器以保持格式的稳健. 在2020年,Zhao等[52]利用间断Galerkin有限元的限制器以修正间断点附近的一阶矩,在光滑区域使用高阶线性逼近,在间断网格上通过HWENO重构修正一阶矩. 后来,Zhao等[23]改进了上述混合HWENO格式,采用WENO-ZQ的构造思想,利用了高次多项式中附加几个低次多项式的非线性凸组合,而线性权可以取为和等于1的任意正数. 最近,Li等[15,53]基于多分辨率WENO格式[54]的框架,构造了一类新型的多分辨率HWENO格式. 该格式在重构过程中利用了中心空间模板的层次结构,同时线性权也可以取为和等于1的任意正数. 与以往的HWENO格式相比,这类多分辨率HWENO格式有以下优点:首先是在重构之前无需修正目标单元的一阶导数值或使用任何保正通量限制器,可以稳定的模拟一些具有强激波的数值例子;第二,对于一维和二维情况,CFL数都可以取为0.6,而在文献[20,51]中CFL数只能取为0.2. 同时,这类多分辨率HWENO格式还可以在光滑区域获得最佳的高阶精度,并在间断附近保持数值无振荡.

3.1 Hermite WENO 格式

令 $v=u_x$,则式(1)对 x 求导之后可得

$$\begin{cases} u_t+f(u)_x=0,\ u(x,0)=u_0(x), \\ v_t+g(u,v)_x=0,\ v(x,0)=v_0(x). \end{cases} \tag{13}$$

分别记 u 和 v 在单元 I_i 上的平均值为

$$\begin{cases} \bar{u}_i(t)=\dfrac{1}{h}\displaystyle\int_{I_i}u(x,t)\mathrm{d}x, \\ \bar{v}_i(t)=\dfrac{1}{h}\displaystyle\int_{I_i}v(x,t)\mathrm{d}x, \end{cases} \tag{14}$$

然后在目标单元 I_i 上对式(13)进行积分,得到如下积分形式:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\bar{u}_i(t)}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{1}{h}(f(u(x_{i+1/2},t))- \\ \quad f(u(x_{i-1/2},t))), \\ \dfrac{\mathrm{d}\bar{v}_i(t)}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{1}{h}(g(u(x_{i+1/2},t),v(x_{i+1/2},t))- \\ \quad g(u(x_{i-1/2},t),v(x_{i-1/2},t))). \end{cases} \tag{15}$$

接着引入如下的半离散守恒格式去逼近式(15):

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\bar{u}_i(t)}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{1}{h}(\hat{f}_{i+1/2}-\hat{f}_{i-1/2}), \\ \dfrac{\mathrm{d}\bar{v}_i(t)}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{1}{h}(\hat{g}_{i+1/2}-\hat{g}_{i-1/2}), \end{cases} \tag{16}$$

其中数值流通量 $\hat{f}_{i+1/2}$ 和 $\hat{g}_{i+1/2}$ 定义为

$$\begin{cases} \hat{f}_{i+1/2}=\hat{f}(u^-_{i+1/2},u^+_{i+1/2}), \\ \hat{g}_{i+1/2}=\hat{g}(u^-_{i+1/2},u^+_{i+1/2};v^-_{i+1/2},v^+_{i+1/2}), \end{cases} \tag{17}$$

这里 $u^{\pm}_{i+1/2}$ 和 $v^{\pm}_{i+1/2}$ 分别是通过重构得到的 $u(x_{i+1/2},t)$ 和 $v(x_{i+1/2},t)$ 的左右极限值. 在这里我们依然采用Lax-Friedrichs通量:

$$\begin{cases} \hat{f}(a,b)=\dfrac{1}{2}[f(a)+f(b)-\alpha(b-a)], \\ \hat{g}(a,b;c,d)=\dfrac{1}{2}[g(a,c)+g(b,d)- \\ \quad \alpha(d-c)]. \end{cases} \tag{18}$$

与WENO格式相同,我们采用显式SSP Runge-Kutta方法离散该常微分方程组(16),从而得到方程组(13)的全离散格式.

3.2 HWENO 重构

下面简要介绍经典的HWENO方法[49](HWENO-QS)和多分辨HWENO方法[15](HWENO-LSQ)重构 $u^{\pm}_{i+1/2}$ 和 $u^{\pm}_{i+1/2}$ 过程. 这部分重构过程是HWENO格式的核心组成部分.

1)重构模板的选取

(i) HWENO-QS:选取3个小模板 $S_0=\{I_{i-1},I_i\}$,$S_1=\{I_i,I_{i+1}\}$ 及大模板 $S_2=\{I_{i-1},I_i,I_{i+1}\}$.

(ii) HWENO-LSQ:选取嵌套模板 $T_0=\{I_i\}$,$T_1=\{I_{i-1},I_i,I_{i+1}\}$.

2)重构逼近多项式

(i) HWENO-QS:在模板 S_k,$k=0,1,2$ 上分别重构二次多项式 $p_k(x)$,$k=0,1,2$,并在大模板 S_2 重构

一个四次多项式 $p_3(x)$，使得

$$\frac{1}{h}\int_{I_{i-1}} p_0(x)\mathrm{d}x=\bar{u}_{i-1},$$
$$\frac{1}{h}\int_{I_i} p_0(x)\mathrm{d}x=\bar{u}_i,$$
$$\frac{1}{h}\int_{I_{i-1}} p'_0(x)\mathrm{d}x=\bar{v}_{i-1};$$
$$\frac{1}{h}\int_{I_i} p_1(x)\mathrm{d}x=\bar{u}_i,$$
$$\frac{1}{h}\int_{I_{i+1}} p_1(x)\mathrm{d}x=\bar{u}_{i+1},$$
$$\frac{1}{h}\int_{I_{i+1}} p'_1(x)\mathrm{d}x=\bar{v}_{i+1};$$
$$\frac{1}{h}\int_{I_{i-1}} p_2(x)\mathrm{d}x=\bar{u}_{i-1},$$
$$\frac{1}{h}\int_{I_i} p_2(x)\mathrm{d}x=\bar{u}_i,$$
$$\frac{1}{h}\int_{I_{i+1}} p_2(x)\mathrm{d}x=\bar{u}_{i+1};$$
$$\frac{1}{h}\int_{I_{i+j}} p_3(x)\mathrm{d}x=\bar{u}_{i+j},j=-1,0,1,$$
$$\frac{1}{h}\int_{I_{i+j}} p'_3(x)\mathrm{d}x=\bar{v}_{i+j},j=-1,1.$$

同时，在模板 $S_k,k=0,1,2$ 上分别重构三次多项式 $p_k(x),k=4,5,6$，并在大模板 S_2 重构一个五次多项式 $p_7(x)$，使得

$$\frac{1}{h}\int_{I_{i+j}} p_4(x)\mathrm{d}x=\bar{u}_{i+j},$$
$$\frac{1}{h}\int_{I_{i+j}} p'_4(x)\mathrm{d}x=\bar{v}_{i+j},\ j=-1,0;$$
$$\frac{1}{h}\int_{I_{i+j}} p_5(x)\mathrm{d}x=\bar{u}_{i+j},$$
$$\frac{1}{h}\int_{I_{i+j}} p'_5(x)\mathrm{d}x=\bar{v}_{i+j},\ j=0,1;$$
$$\frac{1}{h}\int_{I_{i+j}} p_6(x)\mathrm{d}x=\bar{u}_{i+j},\ j=-1,0,1,$$
$$\frac{1}{h}\int_{I_i} p'_6(x)\mathrm{d}x=\bar{v}_i;$$
$$\frac{1}{h}\int_{I_{i+j}} p_7(x)\mathrm{d}x=\bar{u}_{i+j},$$
$$\frac{1}{h}\int_{I_{i+j}} p'_7(x)\mathrm{d}x=\bar{v}_{i+j},\ j=-1,0,1.$$

(ii) HWENO-LSQ：选取嵌套模板 T_0,T_1 上分别构造零次、二次、三次和五次多项式 $q_0(x),q_1(x)$，$q_2(x)$ 和 $q_3(x)$ 使得

$$\frac{1}{h}\int_{I_i} q_0(x)\mathrm{d}x=\bar{u}_i;$$
$$\frac{1}{h}\int_{I_k} q_1(x)\mathrm{d}x=\bar{u}_k,\ k=i-1,i,i+1;$$
$$\frac{1}{h}\int_{I_k} q_2(x)\mathrm{d}x=\bar{u}_k,\ k=i-1,i,i+1,$$
$$\frac{1}{h}\int_{I_i} q'_2(x)\mathrm{d}x=\bar{v}_i;$$
$$\frac{1}{h}\int_{I_k} q_3(x)\mathrm{d}x=\bar{u}_k,\ k=i-1,i,i+1,$$
$$\frac{1}{h}\int_{I_k} q'_3(x)\mathrm{d}x=\bar{v}_k,\ k=i-1,i,i+1.$$

3) 计算线性权

(i) HWENO-QS：在不同的重构点 x_G，比如 $x_G=x_{i+1/2}$ 上计算 $\gamma_0,\gamma_1,\gamma_2$ 和 $\gamma'_0,\gamma'_1,\gamma'_2$ 使得

$$p_3(x_G)=\gamma_0 p_0(x_G)+\gamma_1 p_1(x_G)+\gamma_2 p_2(x_G),$$
$$p'_7(x_G)=\gamma'_0 p'_4(x_G)+\gamma'_1 p'_5(x_G)+\gamma'_2 p'_6(x_G),\tag{19}$$

这里的线性权 $\gamma_0,\gamma_1,\gamma_2$ 和 $\gamma'_0,\gamma'_1,\gamma'_2$ 依赖于网格的拓扑关系及重构点 x_G. 类似于 WENO 方法，式(19)需对任意的函数 u 都成立，式(19)的两个等式分别演变为关于 3 个线性权的两个分别具有 5 个方程和 6 个方程的线性方程组.

(ii) HWENO-LSQ：改写多项式 $q_0(x),q_1(x)$，$q_2(x)$ 和 $q_3(x)$，得到其等价的表示形式，为了保持一致，记 $r_0(x)=q_0(x)$，

$$r_{l_2}(x)=\frac{1}{\gamma_{l_2,l_2}}q_{l_2}(x)-\sum_{l=0}^{l_2-1}\frac{\gamma_{l,l_2}}{\gamma_{l_2,l_2}}r_l(x),\tag{20}$$

在这里我们可以取任意满足条件 $\sum_{l=0}^{l_2}\gamma_{l,l_2}=1,\gamma_{l_2,l_2}\neq 0,l_2=1,2,3$ 的正数，例如：

$$\gamma_{l_1,l_2}=\frac{\bar{\gamma}_{l_1,l_2}}{\sum_{l=0}^{l_2}\bar{\gamma}_{l,l_2}};\ \bar{\gamma}_{l_1,l_2}=10^{l_1-1};\ l_1=1,\cdots,l_2;\ l_2=1,2,3.\tag{21}$$

我们可以看到：

$$q_3(x)=\sum_{l=0}^{3}\gamma_{l,3}r_l(x).\tag{22}$$

4) 计算光滑指示器：继续使用文献[2]给出的公式计算光滑指示器 $\beta_j,j=0,1,2;j=4,5,6$：

$$\beta_j=\sum_{l=1}^{2}\int_{I_i}h^{2l-1}\left(\frac{\partial^l}{\partial x^l}q_j(x)\right)^2\mathrm{d}x,\ j=0,1,2,\tag{23}$$
$$\beta_j=\sum_{l=2}^{3}\int_{I_i}h^{2l-1}\left(\frac{\partial^l}{\partial x^l}q_j(x)\right)^2\mathrm{d}x,\ j=4,5,6,\tag{24}$$
$$\eta_j=\sum_{l=1}^{\kappa}\int_{I_i}h^{2l-1}\left(\frac{\partial^l}{\partial x^l}r_j(x)\right)^2\mathrm{d}x,\ j=1,2,3,\tag{25}$$

其中 κ=2,3,5 分别对应 j=1,2,3. 这里需要特别注意的是，由于 $r_0(x)$ 是一个零次多项式，η_0 的定义有别于其他的 η_j,j=1,2,3. 我们对其做了如下处理，目的是把 η_0 从 0 稍微放大一点使其成为一个比较小的正数：

首先定义

$$\eta_{0L}=(\bar{u}_i-\bar{u}_{i-1})^2,$$

$$\eta_{0R}=(\bar{u}_{i+1}-\bar{u}_i)^2,$$

然后令

$$\bar{\gamma}_{0L}=\begin{cases}1, & \eta_{0L}\geqslant\eta_{0R},\\ 10, & \text{其他},\end{cases}$$

$$\bar{\gamma}_{0R}=11-\bar{\gamma}_{0L},\tag{26}$$

$$\gamma_{0L}=\frac{\bar{\gamma}_{0L}}{\bar{\gamma}_{0L}+\bar{\gamma}_{0R}},\ \gamma_{0R}=1-\gamma_{0L}.$$

最后,定义新的 η_0 为

$$\eta_0=(\omega_{0L}(\bar{u}_i-\bar{u}_{i-1})+\omega_{0R}(\bar{u}_{i+1}-\bar{u}_i))^2,$$

其中:

$$\omega_{0L}=\frac{\bar{\omega}_{0L}}{\bar{\omega}_{0L}+\bar{\omega}_{0R}},\ \omega_{0R}=\frac{\bar{\omega}_{0R}}{\bar{\omega}_{0L}+\bar{\omega}_{0R}},$$

$$\bar{\omega}_{0L}=\gamma_{0L}\left(1+\frac{|\eta_{0R}-\eta_{0L}|^2}{\eta_{0L}+\varepsilon}\right),$$

$$\bar{\omega}_{1R}=\gamma_{1R}\left(1+\frac{|\eta_{0R}-\eta_{0L}|^2}{\eta_{0R}+\varepsilon}\right).$$

5) 计算非线性权

(i) HWENO-QS:利用所求的线性权和指示器计算非线性权 $\omega_l, l=0,1,2$ 及 $\omega'_l, l=0,1,2$[2]:

$$\omega_l=\frac{\bar{\omega}_l}{\sum_{k=0}^{2}\bar{\omega}_k},\ \omega'_l=\frac{\bar{\omega}'_l}{\sum_{k=0}^{2}\bar{\omega}'_k},\ l=0,1,2;$$

$$\bar{\omega}_l=\frac{\gamma_l}{(\beta_l+\varepsilon)^2},\ l=0,1,2;$$

$$\bar{\omega}'_{k-4}=\frac{\gamma'_{k-4}}{(\beta_k+\varepsilon)^2},k=4,5,6.\tag{27}$$

(ii) HWENO-LSQ:类似于 WENO-ZQ 计算非线性权的方法,利用给定的线性权和指示器计算非线性权 $\omega_{l,3}, l=0,1,2,3$. 首先定义 τ 为 η_0,η_1,η_2 和 η_3 之间差距的绝对值,$\tau=\left(\frac{\sum_{l=0}^{2}|\eta_3-\eta_l|}{3}\right)^2$. 因此相应的非线性权可以表示为

$$\omega_{l,3}=\frac{\bar{\omega}_{l,3}}{\sum_{k=0}^{3}\bar{\omega}_{k,3}},$$

$$\bar{\omega}_{l,3}=\gamma_{l,3}\left(1+\frac{\tau}{\eta_{l_1}+\varepsilon}\right),\ l=0,1,2,3.\tag{28}$$

6) 计算最终重构点值:

(i) HWENO-QS:将式(19)中的线性权替换为非线性权(27),得到逼近 $u(x_G,t)$ 和 $v(x_G,t)$ 的重构点值. 比如 $x_G=x_{i+1/2}$ 时,我们得到

$$u_{i+1/2}^-=\omega_0p_0(x_{i+1/2})+\omega_1p_1(x_{i+1/2})+\omega_2p_2(x_{i+1/2}),$$

$$v_{i+1/2}^-=\omega'_0p'_4(x_{i+1/2})+\omega'_1p'_5(x_{i+1/2})+\omega'_2p'_6(x_{i+1/2}).$$

而 $u_{i+1/2}^+$ 和 $v_{i+1/2}^+$ 的重构过程是 $u_{i+1/2}^-$ 和 $v_{i+1/2}^-$ 的重构过程关于 $x_{i+1/2}$ 的镜像对称.

(ii) HWENO-LSQ:将式(22)中的线性权替换为非线性权(28),得到 $u(x,t)$ 在单元 I_i 的逼近多项式 $Q(x)$:

$$Q(x)=\sum_{l=0}^{3}\omega_{l,3}r_l(x),$$

当 $x=x_{i+1/2}$ 或 $x=x_{i-1/2}$ 时,分别得到

$$u_{i+1/2}^-=Q(x_{i+1/2}),u_{i-1/2}^+=Q(x_{i-1/2}).$$

而对于导数 $v(x,t)$,直接使用高阶的线性重构,即 $v(x,t)\approx q'_3(x)$,从而

$$v_{i+1/2}^-=q'_3(x_{i+1/2}),\ v_{i-1/2}^+=q'_3(x_{i-1/2}).$$

4 WENO 方法在全马赫流问题中的应用简述

常见的 WENO 方法通常和显式 SSP Runge-Kutta 方法相结合,应用于含强激波等间断解的高马赫数可压缩流数值模拟. 然而有一类问题,其马赫数可能呈现较大尺度的变化,如火焰燃烧、化学反应、翼型绕流、天体物理等问题. 如果我们选择合适的时空参考尺度 t_0 和 x_0,则流场参考速度 $u_0=x_0/t_0$. 基于恰当的流场参考密度 ρ_0 和参考压强 p_0,我们定义流场的全局马赫数 $M_0=u_0/c_0$,其中 $c_0=\sqrt{\gamma p_0/c_0}$ 为参考声速. 当马赫数 M_0 变小时,流体压缩性减弱,趋于低马赫不可压极限. 当马赫数从高马赫到低马赫跨尺度变化时,流体从可压变为不可压. 传统的计算流体力学数值方法一般将可压和不可压问题分开处理. 对可压问题,质量、动量和能量守恒非常重要. 基于守恒型可压方程组构造守恒型离散格式是保证激波等间断解以正确速度传播的重要基础,同时克服激波间断解的数值伪振荡是激波捕捉格式的重要出发点. 对不可压问题,算法设计在如何保持速度的离散不可压条件以及对湍涡的高分辨能力.

近些年来,针对马赫数跨尺度变化的多尺度流体力学方程组,设计具有渐近保持及其他保结构性质的算法吸引了许多研究者的极大兴趣. 渐近保持格式的概念由上海交通大学的金石教授提出,最早应用于多尺度动理学方程的研究[55]. 金石教授及其合作者首次基于 Gauge 分解发展了等熵欧拉方程组的渐近保持算法[56]. 该工作引发了后续非常广泛的研究,如等熵欧拉方程组[57-63],全欧拉方程组[64-68],纳维-斯托克斯方程组[57,69-71],浅水波方程组[63,72-78],理想磁流体力学方程组[79-80]等等.

我们以全欧拉方程组为例,简要介绍全马赫数流高阶渐近保持有限差分 WENO 格式的构造[65]. 如果我们选取合适的时空参考尺度 t_0 和 x_0,以及恰当的参考密度 ρ_0 和 p_0,可以得到如下的无量纲形式全欧拉方程组:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{u})=0,\\ \dfrac{\partial\rho\boldsymbol{u}}{\partial t}+\nabla\cdot\left(\rho\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}+\dfrac{p}{\varepsilon^2}\boldsymbol{I}\right)=0,\\ \dfrac{\partial E}{\partial t}+\nabla\cdot((E+p)\boldsymbol{u})=0,\end{cases}\tag{29}$$

其中状态方程和全局无量纲参数马赫数定义为

$$E:=\frac{p}{\gamma-1}+\frac{\varepsilon^2}{2}\rho\|\boldsymbol{u}\|^2,\ \varepsilon:=u_0\sqrt{\frac{\rho_0}{p_0}}=\sqrt{\gamma}M_0,\tag{30}$$

其他无量纲参数均取为 1. 在马赫数 ε 趋于 0 时,基于形式化渐近分析,我们可以得到如下的不可压欧拉方程组[65]:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial t}(\rho_0\boldsymbol{u}_0)+\nabla\cdot(\rho_0\boldsymbol{u}_0\otimes\boldsymbol{u}_0)+\nabla p_2=0,\\ \rho_0=\mathrm{Const},\ p_0=\mathrm{Const},\ \nabla\cdot\boldsymbol{u}_0=0.\end{cases}\tag{31}$$

4.1 一阶显隐时间离散格式

我们简要介绍一阶格式的构造过程. 我们先保持空间连续,定义 $\boldsymbol{q}=\rho\boldsymbol{u}$,方程组(29)的一阶显隐时间半离散格式定义如下:

$$\frac{\rho^{n+1}-\rho^n}{\Delta t}+\nabla\cdot\boldsymbol{q}^n=0,\tag{32}$$

$$\frac{\boldsymbol{q}^{n+1}-\boldsymbol{q}^n}{\Delta t}+\nabla\cdot\left(\frac{\boldsymbol{q}^n\otimes\boldsymbol{q}^n}{\rho^n}+p^n\boldsymbol{I}\right)+\frac{1-\varepsilon^2}{\varepsilon^2}\nabla p^{n+1}=0,\tag{33}$$

$$\frac{E^{n+1}-E^n}{\Delta t}+\nabla\cdot\left(\frac{E^n+p^n}{\rho^{n+1}}\boldsymbol{q}^{n+1}\right)=0.\tag{34}$$

格式(32~34)的求解过程包含以下几个步骤:

第 1 步:由式(32)显式更新 ρ^{n+1};

第 2 步:先将方程(33)改写为

$$\boldsymbol{q}^{n+1}=\boldsymbol{q}^*-\Delta t\frac{1-\varepsilon^2}{\varepsilon^2}\nabla p^{n+1}.\tag{35}$$

其中

$$\boldsymbol{q}^*=\boldsymbol{q}^n-\Delta t\nabla\cdot\left(\frac{\boldsymbol{q}^n\otimes\boldsymbol{q}^n}{\rho^n}+p^n\boldsymbol{I}\right).$$

将 $\boldsymbol{q}^{n+1}$ 代入式(34),可以得到

$$E^{n+1}=E^*+\Delta t^2\frac{1-\varepsilon^2}{\varepsilon^2}\nabla\cdot(H^n\nabla p^{n+1}),\tag{36}$$

其中 $H^n=(E^n+p^n)/\rho^{n+1}$ 以及 $E^*=E^n-\Delta t\nabla\cdot(H^n\boldsymbol{q}^*)$. 利用状态方程

$$E^{n+1}=p^{n+1}/(\gamma-1)+\varepsilon^2\|\boldsymbol{q}^n\|^2/(2\rho^n),\tag{37}$$

将 E^{n+1} 替代为 p^{n+1}. 同时为克服方程右端第二项带来的刚性问题,根据压强 p 的渐近展开性质,定义一个压强扰动量 p_2^{n+1}

$$p_2^{n+1}=(p^{n+1}-\overline{p}^n)/\varepsilon^2,\tag{38}$$

其中 $\overline{p}^n=\int_\Omega p^n\mathrm{d}\boldsymbol{x}/|\Omega|$. 从而式(36)可以改写成

$$\frac{\varepsilon^2}{\gamma-1}p_2^{n+1}-\Delta t^2(1-\varepsilon^2)\nabla\cdot(H^n\nabla p_2^{n+1})=E^{**},\tag{39}$$

其中 $E^{**}=E^*-\overline{p}^n/(\gamma-1)-\varepsilon^2\|\boldsymbol{q}^n\|^2/(2\rho^n)$. p_2^{n+1} 所对应的椭圆方程(39)是求解低马赫不可压极限方程(31)的重要部分.

第 3 步:求得 p_2^{n+1} 后,我们从式(35)更新 $\boldsymbol{q}^{n+1}$,以及由式(34)更新 E^{n+1}.

一阶格式里,我们通过恰当的显隐时间离散,得到了压强扰动量 p_2^{n+1} 的线性椭圆方程,是格式渐近保持的关键. 其次,我们对状态方程也采用了显隐处理,从而避免了非线性方程的求解. 最后,我们的质量、动量和能量守恒量是基于守恒方程更新的,从而保证格式空间守恒离散后具有正确的激波捕捉能力.

4.2 高阶显隐时间离散格式

上述一阶显隐时间离散格式推广至高阶时,我们采用了一套特殊的半隐离散格式[65,81]. 我们记 $U=(\rho,\boldsymbol{q},E)^{\mathrm{T}}$,式(29)可以写成如下的自治系统:

$$U_t=\mathcal{H}(U,U).$$

我们用下标"E"对应显式时间离散变量,"I"表示隐式时间离散变量,采用和一阶格式(32)~(34)完全相同的显隐离散,函数 $\mathcal{H}(U_E,U_I)$ 可定义为

$$\mathcal{H}(U_E,U_I)=-\nabla\cdot\mathcal{F}_E-\nabla\cdot\mathcal{F}_I,$$

其中

$$\nabla\cdot\mathcal{F}_E=\left(\nabla\cdot\boldsymbol{q},\nabla\cdot\left(\frac{\boldsymbol{q}\otimes\boldsymbol{q}}{\rho}+p\boldsymbol{I}\right),0\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\nabla\cdot\mathcal{F}_I=\left(0,(1-\varepsilon^2)\nabla p_2,\nabla\cdot\left(\frac{E+p}{\rho}\boldsymbol{q}\right)\right)^{\mathrm{T}}.$$

然后我们采用一个 s 层的显隐 Runge-Kutta 方法,它可以用如下的双 Butcher 表来表示

$$\begin{array}{c|c}\widetilde{\boldsymbol{c}} & \widetilde{\boldsymbol{A}}\\ \hline & \widetilde{\boldsymbol{b}}^{\mathrm{T}}\end{array}\qquad\begin{array}{c|c}\boldsymbol{c} & \boldsymbol{A}\\ \hline & \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\end{array},$$

其中 $\widetilde{\boldsymbol{A}}=(\widetilde{a}_{ij})$ 和 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 均是 $s\times s$ 的矩阵. $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ 是严格下三角矩阵对应显式离散. $\boldsymbol{A}$ 是对角非零的下三角矩阵对应隐式离散且便于编程求解. $\widetilde{\boldsymbol{c}}=(\widetilde{c}_1,\cdots,\widetilde{c}_s)^{\mathrm{T}}$,$\widetilde{\boldsymbol{b}}=(\widetilde{b}_1,\cdots,\widetilde{b}_s)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{c}=(c_1,\cdots,c_s)^{\mathrm{T}}$,以及 $\boldsymbol{b}=(b_1,\cdots,b_s)^{\mathrm{T}}$ 是 $s\times 1$ 的向量. 这两个向量 $\widetilde{\boldsymbol{c}}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 满足

$$\widetilde{c}_i=\sum_{j=1}^{i-1}\widetilde{a}_{ij},\ c_i=\sum_{j=1}^{i}a_{ij}.$$

我们分别基于左边显式 Runge-Kutta 表由 $(U_E)_t=\mathcal{H}(U_E,U_I)$ 更新得到 U_E，再基于右边对角隐式 Runge-Kutta 表由 $(U_I)_t=\mathcal{H}(U_E,U_I)$ 更新得到 U_I，则可以得到高阶时间精度.

4.3 空间有限差分 WENO 重构

前两节描述的 WENO 和 HWENO 格式常用于可压缩欧拉方程组的求解.这里对 $\mathcal{H}(U_E,U_I)$ 中的非线性对流项,我们采用了经典的有限差分 WENO 格式[2-3],克服可压区域对激波等间断解的数值伪振荡.基于新型 WENO 和 HWENO 方法将是我们后续的重要研究方向.我们用空间离散算子来表示,对 $\mathcal{H}(U_E,U_I)$ 的空间离散,我们有

$$\nabla\cdot\mathcal{F}_E=\left(\nabla_{CW}\cdot\boldsymbol{q},\nabla_{CW}\cdot\left(\frac{\boldsymbol{q}\otimes\boldsymbol{q}}{\rho}+p\boldsymbol{I}\right),0\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\nabla\cdot\mathcal{F}_I=\left(0,(1-\varepsilon^2)\nabla_W p_2,\nabla_W\cdot\left(\frac{E+p}{\rho}\boldsymbol{q}\right)\right)^{\mathrm{T}},$$

其中 ∇_{CW} 表示特征方向的有限差分 WENO 重构，∇_W 表示按分量的有限差分 WENO 重构.对应椭圆方程(39),我们都采用中心差离散[62].如果式(29)带有源项,特别是和压强同尺度的刚性源项如重力源项等,我们需采用保平衡的高阶有限差分 WENO 重构,实现对平衡态空间离散后的精准保持,从而可以抓住平衡附近的微扰传播[68,78].该方法目前已经应用到欧拉方程组[62,65,68],纳维-斯托克斯方程组[71],浅水波方程组[78]和理想磁流体力学方程组[79-80]等.

5 结 论

本文主要描述了一种新型非等距模板的 WENO 型算法构造和基于 Hermite 插值或重构的 HWENO 型算法,以及 WENO 型格式结合显隐 Runge-Kutta 方法在全马赫数问题中的应用.新型 WENO-ZQ 方法简便易实施、稳健高鲁棒、一致高精度且收敛性优异.相较于经典 WENO 方法,其线性权可任取和为一的正数且不依赖于网格拓扑,打破了经典 WENO 等方法单元数空间模板构造的壁垒.新型 WENO-ZQ 方法极大地简化了构造步骤和计算流程,非常好的适用于二维三角网格和三维四面体网格,解决了制约 WENO 类算法工程化应用的若干瓶颈问题.同时为了平衡 WENO 方法高精度和重构模板紧致性之间的矛盾,我们基于解的导数信息或矩信息,提出了两种类型的 HWENO 方法,并不断改进 HWENO 方法的构造,极大提升了 HWENO 型方法对强激波间断问题的稳健性.我们也将 WENO 方法和显隐时间离散结合,将其应用到了多尺度双曲方程组全马赫数流问题的高效数值模拟.WENO 方法的高精度和强稳健等特性,特别是新型 WENO 方法对非结构网格的适应性和 HWENO 方法的紧致性,将极大促进 WENO 方法在国防和工业工程中的广泛应用.

参考文献:

[1] LIU X D,OSHER S,CHAN T. Weighted essentially non-oscillatory schemes [J]. Journal of Computational Physics,1994,115(1):200-212.

[2] JIANG G S, SHU C W. Efficient implementation of weighted ENO schemes[J]. Journal of Computational Physics,1996,126(1):202-228.

[3] SHU C W. Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes for hyperbolic conservation laws[M]//Lecture Notes in Mathematics. Berlin:Springer,1998:325-432.

[4] HENRICK A K,ASLAM T D,POWERS J M. Mapped weighted essentially non-oscillatory schemes: achieving optimal order near critical points[J]. Journal of Computational Physics,2005,207(2):542-567.

[5] BORGES R,CARMONA M,COSTA B,et al. An improved weighted essentially non-oscillatory scheme for hyperbolic conservation laws[J]. Journal of Computational Physics, 2008,227(6):3191-3211.

[6] CASTRO M,COSTA B,DON W S. High order weighted essentially non-oscillatory WENO-Z schemes for hyperbolic conservation laws[J]. Journal of Computational Physics, 2011,230(5):1766-1792.

[7] ACKER F,DE R BORGES R B,COSTA B. An improved WENO-Z scheme[J]. Journal of Computational Physics, 2016,313:726-753.

[8] BALSARA D S, GARAIN S, SHU C W. An efficient class of WENO schemes with adaptive order[J]. Journal of Computational Physics,2016,326:780-804.

[9] SHI J,HU C Q,SHU C W. A technique of treating negative weights in WENO schemes[J]. Journal of Computational Physics,2002,175(1):108-127.

[10] LIU Y Y,SHU C W,ZHANG M P. On the positivity of linear weights in WENO approximations [J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica,English Series,2009,25(3):503-538.

[11] BALSARA D S, SHU C W. Monotonicity preserving

weighted essentially non-oscillatory schemes with increasingly high order of accuracy[J]. Journal of Computational Physics,2000,160(2):405-452.

[12] ZHU J,SHU C W. A new type of multi-resolution WENO schemes with increasingly higher order of accuracy on triangular meshes[J]. Journal of Computational Physics, 2019,392:19-33.

[13] ZHU J, SHU C W. A new type of third-order finite volume multi-resolution WENO schemes on tetrahedral meshes[J]. Journal of Computational Physics, 2020, 406:109212.

[14] LEVY D,PUPPO G,RUSSO G. Central WENO schemes for hyperbolic systems of conservation laws[J]. ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis,1999, 33(3):547-571.

[15] LI J Y,SHU C W,QIU J X. Multi-resolution HWENO schemes for hyperbolic conservation laws[J]. Journal of Computational Physics,2021,446:110653.

[16] DENG X G,ZHANG H X. Developing high-order weighted compact nonlinear schemes[J]. Journal of Computational Physics,2000,165(1):22-44.

[17] LEVY D,PUPPO G,RUSSO G. Compact central WENO schemes for multidimensional conservation laws[J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 2000, 22(2): 656-672.

[18] ZHANG S H,JIANG S F,SHU C W. Development of nonlinear weighted compact schemes with increasingly higher order accuracy[J]. Journal of Computational Physics,2008,227(15):7294-7321.

[19] ZHU J, QIU J X. A class of the fourth order finite volume Hermite weighted essentially non-oscillatory schemes[J]. Science in China Series A: Mathematics, 2008,51(8):1549-1560.

[20] LIU H X,QIU J X. Finite difference Hermite WENO schemes for hyperbolic conservation laws[J]. Journal of Scientific Computing,2015,63(2):548-572.

[21] ZHU J, QIU J X. A new fifth order finite difference WENO scheme for solving hyperbolic conservation laws [J]. Journal of Computational Physics, 2016, 318: 110-121.

[22] ZHU J,QIU J X. New finite volume weighted essentially nonoscillatory schemes on triangular meshes[J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 2018, 40(2): A903-A928.

[23] ZHAO Z, QIU J X. A Hermite WENO scheme with artificial linear weights for hyperbolic conservation laws [J]. Journal of Computational Physics, 2020, 417: 109583.

[24] ZHAO Z,QIU J X. An oscillation-free Hermite WENO scheme for hyperbolic conservation laws[J]. Science China Mathematics,2023(1):1-24.

[25] SHU C W. High order weighted essentially nonoscillatory schemes for convection dominated problems[J]. SIAM Review,2009,51(1):82-126.

[26] LIU Y Y,SHU C W,ZHANG M P. High order finite difference WENO schemes for nonlinear degenerate parabolic equations[J]. SIAM Journal on Scientific Computing,2011,33(2):939-965.

[27] XIONG T, ZHANG M P, ZHANG Y T, et al. Fast sweeping fifth order WENO scheme for static hamilton-jacobi equations with accurate boundary treatment[J]. Journal of Scientific Computing, 2010, 45(1/2/3): 514-536.

[28] XIONG T,SHU C W,ZHANG M P. WENO scheme with subcell resolution for computing nonconservative Euler equations with applications to one-dimensional compressible two-medium flows[J]. Journal of Scientific Computing,2012,53(1):222-247.

[29] QIU J X,SHU C W. Finite difference WENO schemes with lax: wendroff-type time discretizations[J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 2003, 24(6): 2185-2198.

[30] JIANG Y, SHU C W, ZHANG M P. An alternative formulation of finite difference weighted ENO schemes with lax: wendroff time discretization for conservation laws[J]. SIAM Journal on Scientific Computing,2013, 35(2):A1137-A1160.

[31] XIONG T, RUSSO G, QIU J M. High order multi-dimensional characteristics tracing for the incompressible Euler equation and the guiding-center Vlasov equation[J]. Journal of Scientific Computing,2018,77(1):263-282.

[32] ZHANG G L,ZHENG S Q,XIONG T. A conservative semi-Lagrangian finite difference WENO scheme based on exponential integrator for one-dimensional scalar nonlinear hyperbolic equations[J]. Electronic Research Archive,2021,29(1):1819-1839.

[33] GOTTLIEB S,MULLEN J S,RUUTH S J. A fifth order flux implicit WENO method[J]. Journal of Scientific Computing,2006,27(1/2/3):271-287.

[34] ABEDIAN R,ADIBI H,DEHGHAN M. A high-order weighted essentially non-oscillatory (WENO) finite

difference scheme for nonlinear degenerate parabolic equations[J]. Computer Physics Communications, 2013, 184(8): 1874-1888.

[35] ARBOGAST T, HUANG C S, ZHAO X K. Finite volume WENO schemes for nonlinear parabolic problems with degenerate diffusion on non-uniform meshes[J]. Journal of Computational Physics, 2019, 399: 108921.

[36] ZHANG P, XIONG T. High order implicit finite difference schemes with a semi-Implicit Weno reconstruction for nonlinear degenerate parabolic equations[J]. SSRN Electronic Journal, 2022: 467: 111442.

[37] ZHANG X X, SHU C W. On maximum-principle-satisfying high order schemes for scalar conservation laws[J]. Journal of Computational Physics, 2010, 229(9): 3091-3120.

[38] ZHANG X X, SHU C W. Positivity-preserving high order finite difference WENO schemes for compressible Euler equations[J]. Journal of Computational Physics, 2012, 231(5): 2245-2258.

[39] XIONG T, QIU J M, XU Z F. A parametrized maximum principle preserving flux limiter for finite difference RK-WENO schemes with applications in incompressible flows[J]. Journal of Computational Physics, 2013, 252: 310-331.

[40] XIONG T, QIU J M, XU Z F, et al. High order maximum principle preserving semi-Lagrangian finite difference WENO schemes for the Vlasov equation[J]. Journal of Computational Physics, 2014, 273: 618-639.

[41] XIONG T, QIU J M, XU Z F. Parametrized positivity preserving flux limiters for the high order finite difference WENO scheme solving compressible Euler equations[J]. Journal of Scientific Computing, 2016, 67(3): 1066-1088.

[42] CAI X F, ZHANG X X, QIU J X. Positivity-preserving high order finite volume HWENO schemes for compressible Euler equations[J]. Journal of Scientific Computing, 2016, 68(2): 464-483.

[43] FAN C, ZHANG X X, QIU J X. Positivity-preserving high order finite volume hybrid Hermite WENO schemes for compressible Navier-Stokes equations[J]. Journal of Computational Physics, 2021, 445: 110596.

[44] FAN C, ZHANG X X, QIU J X. Positivity-preserving high order finite difference WENO schemes for compressible Navier-Stokes equations[J]. Journal of Computational Physics, 2022, 467: 111446.

[45] ZHANG Y T, SHU C W. ENO and WENO schemes[M]// Handbook of Numerical Analysis. Amsterdam: Elsevier, 2016: 103-122.

[46] SHU C W. Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes[J]. Acta Numerica, 2020, 29: 701-762.

[47] ZHU J, QIU J X. A new type of finite volume WENO schemes for hyperbolic conservation laws[J]. Journal of Scientific Computing, 2017, 73(2/3): 1338-1359.

[48] ZHU J, QIU J X. A new third order finite volume weighted essentially non-oscillatory scheme on tetrahedral meshes[J]. Journal of Computational Physics, 2017, 349: 220-232.

[49] QIU J X, SHU C W. Hermite WENO schemes and their application as limiters for Runge-Kutta discontinuous Galerkin method: one-dimensional case[J]. Journal of Computational Physics, 2004, 193(1): 115-135.

[50] QIU J X, SHU C W. Hermite WENO schemes and their application as limiters for Runge-Kutta discontinuous Galerkin method Ⅱ: two dimensional case[J]. Computers & Fluids, 2005, 34(6): 642-663.

[51] LIU H X, QIU J X. Finite difference Hermite WENO schemes for conservation laws, Ⅱ: an alternative approach[J]. Journal of Scientific Computing, 2016, 66(2): 598-624.

[52] ZHAO Z, CHEN Y B, QIU J X. A hybrid Hermite WENO scheme for hyperbolic conservation laws[J]. Journal of Computational Physics, 2020, 405: 109175.

[53] LI J Y, SHU C W, QIU J X. Moment-based multi-resolution HWENO scheme for hyperbolic conservation laws[J]. Communications in Computational Physics, 2022, 32(2): 364-400.

[54] ZHU J, SHU C W. A new type of multi-resolution WENO schemes with increasingly higher order of accuracy[J]. Journal of Computational Physics, 2018, 375: 659-683.

[55] JIN S. Efficient asymptotic-preserving (AP) schemes for some multiscale kinetic equations[J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 1999, 21(2): 441-454.

[56] DEGOND P, JIN S, LIU J. Mach-number uniform asymptotic-preserving gauge schemes for compressible flows[J]. Bulletin of the Institute of Mathematics, Academia Sinica, 2007, 2(4): 851.

[57] HAACK J, JIN S, LIU J G. An all-speed asymptotic-preserving method for the isentropic Euler and navier-stokes equations[J]. Communications in Computational Physics, 2012, 12(4): 955-980.

[58] TANG M. Second order all speed method for the isentropic

Euler equations[J]. Kinetic & Related Models,2012,5(1):155-184.

[59] DIMARCO G,LOUBÈRE R,VIGNAL M H. Study of a new asymptotic preserving scheme for the Euler system in the low Mach number limit[J]. SIAM Journal on Scientific Computing,2017,39(5):A2099-A2128.

[60] BOSCARINO S,RUSSO G,SCANDURRA L. All Mach number second order semi-implicit scheme for the Euler equations of gas dynamics[J]. Journal of Scientific Computing,2018,77(2):850-884.

[61] DIMARCO G,LOUBÈRE R,MICHEL DANSAC V,et al. Second-order implicit-explicit total variation diminishing schemes for the Euler system in the low Mach regime[J]. Journal of Computational Physics,2018,372:178-201.

[62] BOSCARINO S,QIU J M,RUSSO G,et al. A high order semi-implicit IMEX WENO scheme for the all-Mach isentropic Euler system[J]. Journal of Computational Physics,2019,392:594-618.

[63] ARUN K R,SAMANTARAY S. Asymptotic preserving low Mach number accurate IMEX finite volume schemes for the isentropic Euler equations[J]. Journal of Scientific Computing,2020,82(2):1-32.

[64] BOSCHERI W,DIMARCO G,LOUBÈRE R,et al. A second order all Mach number IMEX finite volume solver for the three dimensional Euler equations[J]. Journal of Computational Physics,2020,415:109486.

[65] BOSCARINO S,QIU J M,RUSSO G,et al. High order semi-implicit WENO schemes for all-mach full Euler system of gas dynamics[J]. SIAM Journal on Scientific Computing,2022,44(2):B368-B394.

[66] BISPEN G,LUKÁČOVÁ-MEDVID'OVÁ M,YELASH L. Asymptotic preserving IMEX finite volume schemes for low Mach number Euler equations with gravitation[J]. Journal of Computational Physics,2017,335:222-248.

[67] THOMANN A,PUPPO G,KLINGENBERG C. An all speed second order well-balanced IMEX relaxation scheme for the Euler equations with gravity[J]. Journal of Computational Physics,2020,420:109723.

[68] HUANG G L,XING Y L,XIONG T. High order asymptotic preserving well-balanced finite difference WENO schemes for all Mach full Euler equations with gravity[J]. Communication in Computational Physics,2023 (in press).

[69] CORDIER F,DEGOND P,KUMBARO A. An asymptotic-preserving all-speed scheme for the Euler and Navier-Stokes equations[J]. Journal of Computational Physics,2012,231(17):5685-5704.

[70] TAVELLI M,DUMBSER M. A pressure-based semi-implicit space-time discontinuous Galerkin method on staggered unstructured meshes for the solution of the compressible Navier-Stokes equations at all Mach numbers[J]. Journal of Computational Physics,2017,341:341-376.

[71] BOSCHERI W,PARESCHI L. High order pressure-based semi-implicit IMEX schemes for the 3D Navier-Stokes equations at all Mach numbers[J]. Journal of Computational Physics,2021,434:110206.

[72] BISPEN G,ARUN K R,LUKÁČOVÁ-MEDVID,OVÁ M,et al. IMEX large time step finite volume methods for low Froude number shallow water flows[J]. Communications in Computational Physics,2014,16(2):307-347.

[73] NOELLE S,BISPEN G,ARUN K R,et al. A weakly asymptotic preserving low Mach number scheme for the Euler equations of gas dynamics[J]. SIAM Journal on Scientific Computing,2014,36(6):B989-B1024.

[74] VATER S,KLEIN R. A semi-implicit multiscale scheme for shallow water flows at low Froude number[J]. Communications in Applied Mathematics and Computational Science,2018,13(2):303-336.

[75] LIU X,CHERTOCK A,KURGANOV A. An asymptotic preserving scheme for the two-dimensional shallow water equations with Coriolis forces[J]. Journal of Computational Physics,2019,391:259-279.

[76] LIU X. A well-balanced asymptotic preserving scheme for the two-dimensional shallow water equations over irregular bottom topography[J]. SIAM Journal on Scientific Computing,2020,42(5):B1136-B1172.

[77] DURAN A,MARCHE F,TURPAULT R,et al. Asymptotic preserving scheme for the shallow water equations with source terms on unstructured meshes[J]. Journal of Computational Physics,2015,287:184-206.

[78] HUANG G L,XING Y L,XIONG T. High order well-balanced asymptotic preserving finite difference WENO schemes for the shallow water equations in all Froude numbers[J]. Journal of Computational Physics,2022,463:111255.

[79] CHEN W,WU K L,XIONG T. High order asymptotic preserving finite difference WENO schemes with constrained transport for MHD equations in all sonic Mach numbers[J]. Journal of Computational Physics,2023,488:112240.

[80] CLAUDIUS B, WALTER B, CHRISTIAN K. A high order semi-implicit scheme for ideal magnetohydrodynamics[EB/OL]. [2023-05-01]. https://ifm. mathematik. uniwuerzburg. de/ klingen/publications. html.

[81] BOSCARINO S, FILBET F, RUSSO G. High order semi-implicit schemes for time dependent partial differential equations[J]. Journal of Scientific Computing, 2016, 68(3): 975-1001.

A brief survey on WENO methods

QIU Jianxian, XIONG Tao*

(School of Mathematical Sciences, Xiamen University, Xiamen 361005, China)

Abstract: As an important class of numerical methods for solving compressible hyperbolic conservation laws, the high-order weighted essentially non-oscillatory (WENO) scheme belongs to both finite difference and finite volume frameworks. It achieves high resolutions of shock wave discontinuities while avoiding numerical oscillations by using a nonlinear weighted combination of different sub-stencils. In recent years, to improve the robustness and the computational efficiency, (a) the study of unequal-sized sub-stencils with a different combination, (b) a better extension to high dimensional problems with structured or non-structured meshes, and (c) smaller residue convergences for steady-state problems, have become an active research area. Furthermore, developing efficient and stable numerical methods via the combination of WENO schemes and implicit-explicit (IMEX) Runge-Kutta time discretization and then applying this combined scheme to complex flows under extreme conditions should constitute an attractive research direction. Here, we have performed a series of designs and applications for high-order WENO schemes, including (a) a new WENO-ZQ scheme with an arbitrary convex combination of unequal-sized sub-stencils, (b) Hermite WENO (HWENO) schemes with a Hermite type interpolation or reconstruction, and (c) asymptotic preserving WENO schemes with uniform stability for Euler and shallow-water equations at all speeds. These schemes have greatly improved the flexibility of WENO-type schemes and their applicable regions and can be widely applied to numerous areas, such as national defense engineering, space flight, astrophysics, atmosphere, and ocean among others.

Keywords: WENO method; HWENO method; hyperbolic conservation laws; asymptotic preserving

(责任编辑:汪 军)