
双曲守恒律在有限体积框架下的逆 Lax-Wendroff 数值边界处理方法

杨晓波

(中国矿业大学数学学院, 江苏, 徐州, 221116)

杨晴晴*

(北京大学公共卫生学院, 北京, 100191)

邱建贤

(厦门大学数学科学学院, 福建, 厦门, 361005)

摘要

高阶格式需要较大的模板, 边界与网格可能以任意形式相交, 这为处理数值边界提出了巨大的挑战。本文在笛卡尔网格上构造了求解双曲守恒律方程的高阶有限体积形式的逆 Lax-Wendroff 边界处理方法。在边界处设计了有限体积形式的 WENO 型外插, 相比 Lagrange 型外插, 当边界附近光滑时, 能够保证精度; 当边界附近出现间断时, 能够很好地防止出现振荡。数值实验验证了逆 Lax-Wendroff 格式可以达到高阶精度, 并且在间断附近有较好的表现。

关键词: 逆 Lax-Wendroff 方法; WENO 型外插; 有限体积格式; 数值边界条件

MR (2010) 主题分类: 65M08; 76M12

Inverse Lax-Wendroff method for numerical boundary conditions of conservation laws based on finite volume methods

Yang Xiaobo

(School of Mathematics, China University of Mining and Technology, Jiangsu, 221116, China)

Yang Qingqing

(School of Public Health, Peking University, Beijing, 100191, China)

Qiu Jianxian

(School of Mathematical Sciences, Xiamen University, Fujian, 361005, China)

Abstract

Because of the wide stencil of the interior high order scheme and the arbitrary shapes that boundary intersects grids with, it is difficult to give appropriate values on ghost

* 通讯作者, 邮箱: qingqingyang@stu.pku.edu.cn

cells. In this paper, a high order inverse Lax-Wendroff method for numerical boundary conditions is developed in the finite volume framework to solve hyperbolic conservation laws on a Cartesian mesh. A finite volume WENO type extrapolation is also developed near the boundary which can maintain accuracy and control oscillations compared with a Lagrange type extrapolation. Some numerical tests are provided to illustrate the inverse Lax-Wendroff scheme can achieve high order and have good performance on discontinuities near the boundary.

Keywords: inverse Lax-Wendroff method; WENO-type extrapolation; finite volume method; numerical boundary conditions

2010 Mathematics Subject Classification: 65M08; 76M12

1 引言

双曲守恒律方程是一类重要的偏微分方程，在航空航天、天气预报、石油开采等领域有着广泛应用。很多偏微分方程不存在解析解，即使存在在解析解，解的形式可能很复杂，或者随着时间的推移，解也有可能产生间断或者变形，这为设计高分辨率和高精度的数值算法提出了严峻的挑战。目前求解双曲守恒律方程的数值算法主要包含：有限差分方法（Finite Difference Method, FDM），有限体积方法（Finite Volume Method, FVM），有限元方法以及一些混合方法。

目前关于双曲守恒律计算区域内部的高精度和高分辨率格式较多，比如总变差不增（Total Variation Diminishing, TVD）格式^[1]，本质无振荡格式（Essentially Non-Oscillatory, ENO）^{[2][3][4]}和加权本质无振荡格式（Weighted ENO, WENO）^[5]。1996年，Jiang 和 Shu 进一步补充完善了 WENO 格式^[6]，记作 WENO-JS 格式。在此基础上，出现了更多改进的 WENO 格式，比如 Hermite WENO 格式（HWENO）^{[7][8]}，中心 WENO 格式^{[9][10]}。最近，Qiu 和 Zhu 进一步提出了五阶 WENO 格式^{[11][12]}，记作 WENO-ZQ 格式。五阶 WENO-ZQ 格式的模板由一个大模板和两个小模板构成，重构的点值是大模板上的四次多项式和小模板上的两个线性多项式点值的凸组合。相比经典的 WENO-JS 格式，WENO-ZQ 格式的线性权可以为任意正数，不需要在每个点进行重新计算，减少了计算量，并且更容易推广到高维。

但是目前关于边界条件处理的格式研究较少。实际的物理边界可能是不规则的复杂几何形状，可能与网格线以任意形状相交。对于此类问题，第一种常用的处理方法是使用贴体网格（Body-Fitted Mesh），这种方法能够比较准确的满足边界条件。当计算区域比较简单时，可以找到整个区域的光滑映射，生成单个区域的贴体网格进行计

算，但是对于复杂的几何求解区域，很难映射到一个区域，此时一般会采用分区或者重叠等方法，计算量相对较大。当边界随时间变化的时候，在每个时间层都需要重新生成一套网格，大大增加了计算成本^{[13][14]}。

第二种方法是使用笛卡尔网格，笛卡尔网格结构简单、容易生成、便于处理、计算效率高，但是当计算区域是复杂的几何形状时，物理边界和笛卡尔网格的格点不重合，此时很难直接对边界条件进行赋值计算。特别当计算区域是复杂的静止或者移动边界时，很可能会出现网格格点和物理边界不重合但距离很近的情况，称作 cut cell 问题，此时需要对时间步长进行很严格的限制^{[15][16]}。笛卡尔网格上的嵌入边界法（Embedded Boundary Method）是基于有限差分框架的数值边界处理方式，Kreiss 等用来求解带有 Neumann 边界条件或者 Dirichlet 边界条件的波动方程^{[17][18][19]}。Petersson 将此方法应用到双曲守恒律方程，得到具有二阶精度的有限差分格式^[20]。Graves 等将嵌入边界法应用到有限体积格式^{[21][22]}。其他处理 cut cell 的方法可见参考文献^{[23][24]}。

Shu 等处理静态 Hamilton-Jacobi 方程时，用到了 Lax-Wendroff 方法处理边界条件^[30]，随后 Xiong 等将此方法扩展到五阶^[31]。Lax-Wendroff 边界处理的思想是通过使用给定的偏微分方程和边界条件，用切向导数表示法向导数，通过 Taylor 展开给出虚拟单元值。Tan 和 Shu 利用类似思路去处理时间相关的双曲守恒律方程，称为逆 Lax-Wendroff 方法（Inverse Lax-Wendroff, ILW）^[32]。ILW 方法的思路是在入流边界利用给定的偏微分方程和边界条件，把空间法向导数改写成时间导数和切向导数的组合，在出流边界用外插方法得到空间导数值，最后带入 Taylor 展开求出虚拟单元上的值。因为 Lax-Wendroff 格式的思想是利用给定的方程，把时间导数用空间导数改写，上面的方法正好相反，所以称为逆 Lax-Wendroff 方法。随着入流边界处导数阶数的增加，求解会变得困难，Tan 在随后提出对于二阶及以上的导数，可以由外插得到，不需要改写方程^{[33][34]}。随后 Tan 等把 ILW 方法应用到对流扩散方程，带有移动边界的可压缩无粘流体，爆炸波情形^{[35][36][37]}。Shu 等证明了 ILW 方法是稳定的^{[38][39]}。

本文的主要结构如下，在第二部分介绍边界附近区域使用的有限体积形式的逆 Lax-Wendroff 格式的具体形式以及构造的有限体积 WENO 型外插，在第三部分通过大量数值实验展示有限体积形式逆 Lax-Wendroff 格式和 WENO 型外插的性能，在第四部分进行总结与展望。

2 逆 Lax-Wendroff 方法

本章介绍一维，二维标量方程和方程组情形下的逆 Lax-Wendroff 数值边界处理方法，并在边界处构造有限体积形式 WENO 型外插。

2.1 一维逆 Lax-Wendroff 方法

考虑 $\mathbf{U} = \mathbf{U}(x, t) \in R$ 的一维严格双曲守恒律方程

$$\begin{cases} \mathbf{U}_t + \mathbf{F}(\mathbf{U})_x = 0 & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ \mathbf{U}(x, 0) = \mathbf{U}_0(x) & x \in \bar{\Omega}, \end{cases} \quad (2.1)$$

其中 Ω 是有界区域, 可以被一致笛卡尔网格 $\Omega_h = \{I_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] : 0 \leq i \leq N_x\}$ 覆盖, 均匀网格的步长为 Δx , 每个单元 I_i 的中心为 $x_i = \frac{1}{2}(x_{i-1/2} + x_{i+1/2})$ 。在任意时刻 t , 边界 $\partial\Omega$ 有合适的边界条件进行描述。

在每个网格单元对方程 (2.1) 进行积分, 可得

$$\frac{d\mathbf{U}(x_i, t)}{dt} + \frac{1}{\Delta x} (\mathbf{F}(\mathbf{U}(x_{i+1/2}, t)) - \mathbf{F}(\mathbf{U}(x_{i-1/2}, t))) = 0,$$

其中 $\mathbf{U}(x_i, t) = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{U}(\xi, t) d\xi$ 表示单元 I_i 上的单元平均, 上面积分守恒形式的数值逼近为

$$\frac{d}{dt} \mathbf{U}_i(t) = L(\mathbf{U}) = -\frac{1}{\Delta x} (\widehat{\mathbf{F}}_{i+1/2} - \widehat{\mathbf{F}}_{i-1/2}), \quad (2.2)$$

$\mathbf{U}_i(t)$ 为单元平均 $\mathbf{U}(x_i, t)$ 的数值逼近, $\widehat{\mathbf{F}}_{i+1/2}$ 为数值流通量, 定义为 $\widehat{\mathbf{F}}_{i+1/2} = \widehat{\mathbf{F}}(\mathbf{U}_{i+1/2}^-, \mathbf{U}_{i+1/2}^+)$, 其中 $\mathbf{U}_{i+1/2}^\pm$ 可以由 WENO-ZQ 重构得到。本文采用的数值流通量函数为 Lax-Friedrichs 流通量

$$\widehat{\mathbf{F}}(a, b) = \frac{1}{2} [\mathbf{F}(a) + \mathbf{F}(b) - \alpha(b - a)],$$

其中常数 $\alpha = \max_U |\mathbf{F}'(\mathbf{U})|$, 最大值在整个区间的 \mathbf{U} 取得。

此时需要给出边界附近虚拟单元上的平均值 \mathbf{U}_i 。下面分别在一维标量方程和方程组情形下介绍逆 Lax-Wendroff 边界处理方法以及 WENO 型外插。

2.1.1 一维标量逆 Lax-Wendroff 方法

考虑一维标量双曲守恒律方程

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 & x \in (-1, 1), \quad t > 0, \\ u(-1, t) = g(t) & t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in [-1, 1], \end{cases} \quad (2.3)$$

假设对于任意 $t > 0$, 有 $f'(u(-1, t)) \geq \alpha > 0$ 和 $f'(u(1, t)) \geq \alpha > 0$ 。由假设可知, $x = -1$ 是入流边界, $x = 1$ 是出流边界, 只需在入流边界处给一个边界条件 $g(t)$ 。

采用均匀网格对计算区域 $(-1, 1)$ 进行剖分,

$$-1 + \Delta x/2 = x_0 < x_1 < x_N = 1 - \Delta x/2. \quad (2.4)$$

每个小区间记作 $I_i = [x_i - \frac{1}{2}\Delta x, x_i + \frac{1}{2}\Delta x] = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$, 小区间 I_i 的单元中心为 $x_i = \frac{x_{i-1/2} + x_{i+1/2}}{2}$ 。当区域是二维复杂几何形状时, 计算区域边界很难和网格点重合, 所以特意选择了上面的网格剖分方式, 让 x_0 和 x_N 都不落在区域边界上。

在入流边界 $x = -1$ 处, u 的 $s-1$ 阶 Taylor 展开为

$$u(x, t_n) = \sum_{k=0}^{s-1} \frac{(x+1)^k}{k!} \frac{\partial^k u(-1, t_n)}{\partial x^k} + O(\Delta x^s), \quad (2.5)$$

虚拟单元 I_j 的单元平均, 可以直接由 (2.5) 积分得到

$$u_j = \int_{I_j} \sum_{k=0}^{s-1} \frac{(x+1)^k}{k!} \frac{\partial^k u(-1, t_n)}{\partial x^k} dx. \quad (2.6)$$

接下来虚拟单元上的单元平均主要利用数值积分进行计算。以 3 阶有限体积 WENO-ZQ^[12] 格式为例, 此时需要求出位于虚拟单元 $I_j, j = -2, -1$ 上的单元平均值, 对上面的 Taylor 展开进行 3 阶精度 Gauss 积分即可得到。因此在虚拟单元 I_j 上对单元平均 u_j 的 3 阶逼近为

$$u_j = \sum_g \theta_g \left(\sum_{k=0}^2 \frac{(x_{j+\sigma_g} + 1)^k}{k!} \frac{\partial^k u(-1, t_n)}{\partial x^k} \right), \quad j = -2, -1, \quad (2.7)$$

其中 θ_g 和 σ_g 为两点 Gauss 积分公式的权和节点, 取值为

$$\theta_g = \frac{1}{2}, \quad \sigma_g = \pm \frac{\sqrt{3}}{6}, \quad g = 0, 1.$$

同样, 对于 5 阶有限体积 WENO-ZQ 格式^[12], 对应的边界虚拟单元上的逼近为

$$u_j = \sum_g \theta_g \left(\sum_{k=0}^4 \frac{(x_{j+\sigma_g} + 1)^k}{k!} \frac{\partial^k u(-1, t_n)}{\partial x^k} \right), \quad j = -3, -2, -1,$$

对应的 5 阶精度的 Gauss 积分的权和节点为

$$\theta_g = \frac{5}{18}, \frac{8}{18}, \frac{5}{18}, \quad \sigma_g = -\frac{\sqrt{15}}{10}, 0, +\frac{\sqrt{15}}{10}, \quad g = 0, 1, 2.$$

因此, 为了求出入流边界虚拟单元的单元平均, 只需要利用逆 Lax-Wendroff 方法求出 $\frac{\partial^k u(-1, t_n)}{\partial x^k}, k = 0, \dots, s-1$ 。

首先由边界条件可得

$$u(-1, t_n) = g(t_n). \quad (2.8)$$

为了得到空间导数, 在 $x = -1, t = t_n$ 处利用给定的偏微分方程 $u_t + f'(u)u_x = 0$, 可得

$$u_x(-1, t_n) = -\frac{u_t(-1, t_n)}{f'(u(-1, t_n))} = -\frac{g'(t_n)}{f'(g(t_n))}, \quad (2.9)$$

由假设 $f'(u(-1, t)) \geq \alpha > 0$ 可知, 此处 $f'(g(t_n))$ 有界且不为 0。

对方程两端分别关于 t 和 x 求导可得

$$u_{tt} + f''(u)u_t u_x + f'(u)u_{xt} = 0, \quad (2.10)$$

$$u_{tx} + f''(u)u_x u_x + f'(u)u_{xx} = 0, \quad (2.11)$$

联立方程(2.10)和(2.11), 可得

$$u_{tt} + f''(u)u_t u_x - f'(u)f''(u)u_x^2 - f'(u)^2 u_{xx} = 0.$$

在 $x = -1, t = t_n$ 处, 可得

$$u_{xx}(-1, t_n) = \frac{f'(g(t_n))g''(t_n) - 2f''(g(t_n))g'(t_n)^2}{f'(g(t_n))^3}. \quad (2.12)$$

对于阶数更高的 s , 采用同样的流程, 可以求出 $\frac{\partial^k u(-1, t_n)}{\partial x^k}$, $k = 0, \dots, s-1$ 。但是当方程形式复杂或者要求的导数阶数很高时, 导数的计算会很复杂, 对于这种情形, Tan 指出对于 2 阶及以上的空间导数, 可以直接利用外插求出空间导数, 并且不影响格式的稳定性^[33]。构造数值导数的模板不应该包含间断, 对于边界附近区域存在间断, $g(t)$ 不连续的情形, 此时可以用 ENO^[4]或者 WENO^[6] 方法构造数值导数。

对于出流边界 $x = 1$, 在 $x = 1, t = t_n$ 处 Taylor 展开可得

$$u(x, t_n) = \sum_{k=0}^{s-1} \frac{(x-1)^k}{k!} u^{*(k)}, \quad (2.13)$$

$u^{*(k)}$ 是 $\frac{\partial^k u(1, t_n)}{\partial x^k}$ 的 $s-k$ 阶逼近。当 u 在边界附近光滑时, 可以由小区间 I_{N-s+1}, \dots, I_N 上的单元平均 u_{N-s+1}, \dots, u_N 构造 $s-1$ 次 Lagrange 多项式, 进而得到

$$u^{*(k)} = \left. \frac{d^k p_{s-1}(x)}{dx^k} \right|_{x=1}. \quad (2.14)$$

当有激波穿过边界时, 此时边界和激波之间没有足够的点进行高阶外插, 在这种情况下, 仍旧使用高阶外插会在激波附近引起严重振荡。为了防止这种情况发生, 一般会选择一种低阶但是更稳健的外插, 为此本文构造了有限体积形式的 WENO 型外插。

2.1.2 一维 WENO 型外插

下面以 3 阶有限体积形式 WENO 型外插为例, 介绍构造过程。

假设有三个小区间 $\{I_0, I_1, I_2\}$ ，对应的单元平均为 $\{u_0, u_1, u_2\}$ 。我们希望得到 $\frac{d^k u(x_0 - \Delta x/2)}{dx^k}$ 的 3-k 阶逼近，记作 $u^{*(k)}$, $k = 0, 1, 2$ 。由小区间可以构造三个模板

$$S_r = \{I_0, \dots, I_r\}, \quad r = 0, 1, 2.$$

在每个模板 S_r 上可以构造 r 次多项式 $p_r(x)$ ，分别满足

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{I_j} p_0(x) dx = u_j, j = 0; \quad \frac{1}{\Delta x} \int_{I_j} p_1(x) dx = u_j, j = 0, 1; \quad \frac{1}{\Delta x} \int_{I_j} p_2(x) dx = u_j, j = 0, 1, 2.$$

多项式 p_r 的具体形式如下

$$\begin{aligned} p_0(x) &= u_0, \quad p_1(x) = u_0 + \frac{u_1 - u_0}{\Delta x} (x - x_0), \\ p_2(x) &= \left(\frac{23}{24} - \frac{3}{2} \frac{x - x_0}{\Delta x} + \frac{1}{2} \frac{(x - x_0)^2}{\Delta x^2} \right) u_0 + \left(\frac{1}{12} + 2 \frac{x - x_0}{\Delta x} - \frac{(x - x_0)^2}{\Delta x^2} \right) u_1 \\ &\quad + \left(-\frac{1}{24} - \frac{1}{2} \frac{x - x_0}{\Delta x} + \frac{1}{2} \frac{(x - x_0)^2}{\Delta x^2} \right) u_2. \end{aligned}$$

如果 $u(x)$ 在 S_2 上光滑，可以直接由外插得到

$$u^{*(k)} = \sum_{r=0}^2 d_r \frac{d^k p_r(x)}{dx^k} \Big|_{x=x_0 - \Delta x/2},$$

这里 $d_0 = \Delta x^2$ 、 $d_1 = \Delta x$ 、 $d_2 = 1 - \Delta x - \Delta x^2$ 。

当边界处存在间断时，考虑如下形式的 WENO 型外插

$$u^{*(k)} = \sum_{r=0}^2 \omega_r \frac{d^k p_r(x)}{dx^k} \Big|_{x=x_0 - \Delta x/2}, \quad (2.15)$$

这里 ω_r 是依赖 u_j 的非线性权。如果 $u(x)$ 在 S_2 上光滑时，非线性权可以满足

$$\omega_0 = O(\Delta x^2), \omega_1 = O(\Delta x), \omega_2 = 1 - \omega_0 - \omega_1, \quad (2.16)$$

(2.15) 则可以达到 3-k 阶逼近。非线性权和光滑指示子采用经典 WENO-JS 格式的取法^[6]。非线性权取法如下

$$\omega_r = \frac{\tilde{\omega}_r}{\sum_{s=0}^2 \tilde{\omega}_s}, \quad \tilde{\omega}_r = \frac{d_r}{(\epsilon + \beta_r)^2}, \quad \epsilon = 10^{-6}. \quad (2.17)$$

β_r 为光滑指示子, 取法如下:

$$\begin{aligned}\beta_0 &= \Delta x^2 \\ \beta_1 &= \sum_{l=1}^2 \int_{x_0-\Delta x}^{x_0} \Delta x^{2l-1} \left(\frac{d^l}{dx^l} p_1(x) \right)^2 dx = (u_1 - u_0)^2 \\ \beta_2 &= \sum_{l=1}^2 \int_{x_0-\Delta x}^{x_0} \Delta x^{2l-1} \left(\frac{d^l}{dx^l} p_2(x) \right)^2 dx \\ &= \frac{13}{12} (u_0 - 2u_1 + u_2)^2 + (-2u_0 + 3u_1 - u_2)^2.\end{aligned}\tag{2.18}$$

2.1.3 一维方程组逆 Lax-Wendroff 方法

考虑带有初边值条件的一维可压缩欧拉方程组

$$\mathbf{U} + \mathbf{F}(\mathbf{U})_x = 0, \quad x \in (-1, 1), \quad t > 0,\tag{2.19}$$

其中 \mathbf{U} 为守恒形式的变量, $\mathbf{U} = (U_1, U_2, U_3)^T = (\rho, \rho u, E)^T$, $\mathbf{F}(\mathbf{U})$ 为流通量函数,

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} U_2 \\ (\gamma - 1)U_3 + \frac{3-\gamma}{2} \frac{u_2^2}{U_1} \\ \left(\gamma U_3 - \frac{\gamma-1}{2} \frac{u_2^2}{v_1} \right) \frac{U_2}{U_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(E + p) \end{pmatrix}.$$

ρ 、 u 、 p 和 E 分别表示密度、速度、压强和能量。状态方程为

$$E = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho u^2,$$

空气在常温状态下 $\gamma = 1.4$ 。以右边界 $x = 1$ 为例进行说明, 对于左边界可以采用类似的处理方法。

利用欧拉方程的局部特征分解可以确定在 t 时刻边界处所需要的入流和出流边界条件情况。在边界处, 记流通量函数 $\mathbf{F}(\mathbf{U})$ 的 Jacobian 矩阵为

$$\mathbf{A}_\perp(\mathbf{U}_b) = \left. \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}} \right|_{\mathbf{U}=\mathbf{U}_b},$$

这里 $\mathbf{U}_b = \mathbf{U}(1, t)$ 。 $\mathbf{A}_\perp(\mathbf{U}_b)$ 的三个特征值为

$$\lambda_1(\mathbf{U}_b) = u_b - c_b, \quad \lambda_2(\mathbf{U}_b) = u_b, \quad \lambda_3(\mathbf{U}_b) = u_b + c_b.$$

左特征向量 \mathbf{l}_1 、 \mathbf{l}_2 、 \mathbf{l}_3 构成左特征矩阵

$$\mathbf{L}(\mathbf{U}_b) = \begin{pmatrix} \mathbf{l}_1(\mathbf{U}_b) \\ \mathbf{l}_2(\mathbf{U}_b) \\ \mathbf{l}_3(\mathbf{U}_b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{1,1}(\mathbf{U}_b) & l_{1,2}(\mathbf{U}_b) & l_{1,3}(\mathbf{U}_b) \\ l_{2,1}(\mathbf{U}_b) & l_{2,2}(\mathbf{U}_b) & l_{2,3}(\mathbf{U}_b) \\ l_{3,1}(\mathbf{U}_b) & l_{3,2}(\mathbf{U}_b) & l_{3,3}(\mathbf{U}_b) \end{pmatrix}.$$

同样，右特征向量构成的右特征矩阵为

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}_b) = (\mathbf{r}_1(\mathbf{U}_b) \quad \mathbf{r}_2(\mathbf{U}_b) \quad \mathbf{r}_3(\mathbf{U}_b)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ u-c & u & u+c \\ H-uc & \frac{1}{2}u^2 & H+uc. \end{pmatrix}_{\mathbf{U}=\mathbf{U}_b},$$

H 表示焓，与 E 、 P 、 ρ 有关

$$H = \frac{E + P}{\rho}.$$

类似标量情况下的假设，此处仍然假设 Jacobian 矩阵的特征值都不接近 0，即 $|\lambda| \geq \alpha > 0$ 。入流边界条件数量取决于非正特征值的数量。为了简化，如果在边界处 $\lambda_m(\mathbf{U}_b) < 0, 1 \leq m \leq q$ ，则假设需要的边界条件为 $U_m(1, t) = g_m(t), 1 \leq m \leq q$ 。

以 $\lambda_1(\mathbf{U}_b) \leq \lambda_2(\mathbf{U}_b) < 0, \lambda_3(\mathbf{U}_b) > 0$ 的情形为例进行说明。此时有两个特征值小于 0，所以在边界 $x = 1$ 处，需要两个入流边界条件，假设对于任意 $t > 0$ ，不妨假设给出的边界条件为

$$U_1(1, t) = g_1(t), \quad U_2(1, t) = g_2(t).$$

需要指出，当确定边界条件数量后，可以从所有变量中任意选择相应数量的变量给出边界条件，不需要按照上面的顺序给边界条件。假设在 $t = t_n$ 时间层，内部格式更新了 $\mathbf{U}_j, j = 0, \dots, N$ 。在 $x = 1, t = t_n$ 处的 $s-1$ 阶 Taylor 展开为

$$U_m(x, t_n) = \sum_{k=0}^{s-1} \frac{(x-1)^k}{k!} \frac{\partial^k U_m(1, t_n)}{\partial x^k} + O(\Delta x^s), \quad m = 1, 2, 3, \quad (2.20)$$

对上面的 Taylor 展开进行 Gauss 数值积分可以得到

$$(U_m)_j = \sum_g \theta_g \left(\sum_{k=0}^{s-1} \frac{(x_{j+\sigma_g} - 1)^k}{k!} U_m^{*(k)} \right), \quad m = 1, 2, 3, \quad (2.21)$$

其中 $U_m^{*(k)}$ 是空间导数 $\frac{\partial^k U_m(1, t_n)}{\partial x^k}$ 的 $s-k$ 阶逼近。对于三阶格式，则为

$$(U_m)_j = \sum_{g=0}^1 \theta_g \left(\sum_{k=0}^2 \frac{(x_{j+\sigma_g} - 1)^k}{k!} U_m^{*(k)} \right), \quad m = 1, 2, 3, \quad j = N+1, N+2.$$

由于边界处不一定有 $\mathbf{U}(1, t_n)$ 的具体描述，所以在特征分解中用 \mathbf{U}_N 代替 \mathbf{U}_b 。靠近边界附近的出流局部特征变量 V_3 定义为

$$(V_3)_j = \mathbf{l}_3(\mathbf{U}_N) \mathbf{U}_j, \quad j = N-s+1, \dots, N. \quad (2.22)$$

如果解在边界附近光滑，可以选择 Lagrange 外插，否则选择上面定义的 WENO 型外插。记外插得到的 V_3 的各阶导数为 $V_3^{*(k)}$, $k = 0, \dots, s-1$ 。对于 $U_1^{*(0)}$ 和 $U_2^{*(0)}$ 直接由给定的边界条件赋值

$$U_1^{*(0)} = g_1(t_n), \quad U_2^{*(0)} = g_2(t_n).$$

对于 $U_3^{*(0)}$ ，由 $V_3 = l_3 \mathbf{U}_N$ 可以得到

$$U_3^{*(0)} = \frac{1}{l_{3,3}(\mathbf{U}_N)} \left[V_3^{*(0)} - l_{3,1}(\mathbf{U}_N) U_1^{*(0)} - l_{3,2}(\mathbf{U}_N) U_2^{*(0)} \right].$$

由上面可知对于 0 阶空间导数，有

$$U_1^{*(0)} = g_1(t_n), \quad U_2^{*(0)} = g_2(t_n), \quad U_3^{*(0)} = \frac{1}{l_{3,3}(\mathbf{U}_N)} \left[V_3^{*(0)} - l_{3,1}(\mathbf{U}_N) U_1^{*(0)} - l_{3,2}(\mathbf{U}_N) U_2^{*(0)} \right]. \quad (2.23)$$

对于空间 1 阶导数 $U_m^{*(1)}$ ，由欧拉方程的质量方程可知

$$(U_1)_t + (U_2)_x = 0, \quad \Rightarrow \quad g_1'(t_n) + U_2^{*(1)} = 0.$$

对动量方程两端同时求关于空间的一阶导数可以得到

$$\begin{aligned} (U_2)_t + (\gamma - 1)U_3^{*(1)} + (3 - \gamma) \frac{U_2^{*(0)}}{U_1^{*(0)}} U_2^{*(1)} - \frac{3 - \gamma}{2} \left(\frac{U_2^{*(0)}}{U_1^{*(0)}} \right)^2 U_1^{*(1)} &= 0, \quad \Rightarrow \\ g_2'(t_n) + (\gamma - 1)U_3^{*(1)} + (3 - \gamma) \frac{U_2^{*(0)}}{U_1^{*(0)}} U_2^{*(1)} - \frac{3 - \gamma}{2} \left(\frac{U_2^{*(0)}}{U_1^{*(0)}} \right)^2 U_1^{*(1)} &= 0. \end{aligned}$$

$U_3^{*(1)}$ 可以由

$$l_{3,1}(\mathbf{U}_N) U_1^{*(1)} + l_{3,2}(\mathbf{U}_N) U_2^{*(1)} + l_{3,3}(\mathbf{U}_N) U_3^{*(1)} = V_3^{*(1)}$$

得到。

所以对于 $U_m^{*(1)}$ 有

$$\begin{aligned} g_1'(t_n) + U_2^{*(1)} &= 0, \\ g_2'(t_n) + (\gamma - 1)U_3^{*(1)} + (3 - \gamma) \frac{U_2^{*(0)}}{U_1^{*(0)}} U_2^{*(1)} - \frac{3 - \gamma}{2} \left(\frac{U_2^{*(0)}}{U_1^{*(0)}} \right)^2 U_1^{*(1)} &= 0, \quad (2.24) \\ l_{3,1}(\mathbf{U}_N) U_1^{*(1)} + l_{3,2}(\mathbf{U}_N) U_2^{*(1)} + l_{3,3}(\mathbf{U}_N) U_3^{*(1)} &= V_3^{*(1)}. \end{aligned}$$

联立上面三个方程，可以得到 $U_m^{*(1)}$ 。对于更高阶的导数 $U_m^{*(k)}$ ，同样可以由改写欧拉方程，结合外插得到的关于 V_3 的各阶导数和之前得到的低阶空间导数 $U_m^{*(j)}$, $j = 1, \dots, k-1$ ，表示。

随着导数阶数的升高，方程会变得更加复杂。对于二阶及以上空间导数，可以直接用 Lagrange 型外插或者 WENO 型外插计算投影变量的导数，然后返回到原来的空间得到。此时 $U^{*(k)}, k = 2, 3, 4$ 可以通过求解下面的方程组得到，

$$\mathbf{L}(\mathbf{U}_N) \begin{pmatrix} U_1^{*(k)} \\ U_2^{*(k)} \\ U_3^{*(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1^{*(k)} \\ V_2^{*(k)} \\ V_3^{*(k)} \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

边界 $x = 1$ 附近的虚拟单元值 \mathbf{U}_j 的赋值算法总结如下：

假设在时间层 t_n ，内部的单元值 $\mathbf{U}_j, j = 0, \dots, N$ 已经被更新，

1. 计算 Jacobian 矩阵 $\mathbf{A}_\perp(\mathbf{U}_N)$ 的特征值 $\lambda(\mathbf{U}_N), m = 1, 2, 3$ 以及对应的特征矩阵 $\mathbf{L}(\mathbf{U}_N)$ 和 $\mathbf{R}(\mathbf{U}_N)$ 。由 $\lambda(\mathbf{U}_N)_m$ 的符号确定需要的入流边界条件 $g_m(t)$ 。
2. 由 (2.22) 计算出流特征变量 $(V_m)_j, j = N - s + 1, \dots, N$ ，然后利用 Lagrange 型外插或者 WENO 型外插得到边界处导数值 $V_m^{*(k)}, k = 0, \dots, s - 1$ 。
3. 通过已经给定的边界条件和外插得到的 $V_m^{*(0)}$ 计算 $U_m^{*(0)}, m = 1, 2, 3$ 。
4. 利用逆 Lax-Wendroff 步骤将边界条件 $g_m(t)$ 的一阶导数 $g'_m(t)$ 表示成一阶或者零阶空间导数的组合，同时结合外插得到的方程，组成线性方程组或者最小二乘问题进行求解，得到 $U_m^{*(1)}, m = 1, 2, 3$ 。
5. 利用 Lagrange 型外插或者 WENO 型外插得到的 $V_m^{*(k)}$ ，结合 (2.25) 得到高阶导数 $U_m^{*(k)}, k = 2, \dots, s - 1$ 。
6. 通过 Taylor 展开的数值积分 (2.21) 得到虚拟单元上的单元平均。

2.2 二维逆 Lax-Wendroff 方法

二维情形下，双曲守恒律方程关于空间的半离散格式为 (2.26)，

$$\frac{d}{dt} \mathbf{U}_{i,k}(t) = L(\mathbf{U}) = -\frac{1}{\Delta x} \left(\hat{\mathbf{F}}_{i+1/2,k} - \hat{\mathbf{F}}_{i-1/2,k} \right) - \frac{1}{\Delta y} \left(\hat{\mathbf{G}}_{i,k+1/2} - \hat{\mathbf{G}}_{i,k-1/2} \right), \quad (2.26)$$

其中 $\hat{\mathbf{F}}_{i+1/2,k}$ 和 $\hat{\mathbf{G}}_{i,k+1/2}$ 为数值流通量函数，定义如下

$$\hat{\mathbf{F}}_{i+1/2,k} = \sum_l \theta_l \hat{\mathbf{F}} \left(\mathbf{U}_{i+1/2,k+\sigma_l}^-, \mathbf{U}_{i+1/2,k+\sigma_l}^+ \right), \quad (2.27)$$

$$\hat{\mathbf{G}}_{i,k+1/2} = \sum_l \theta_l \hat{\mathbf{G}} \left(\mathbf{U}_{i+\sigma_l,k+1/2}^-, \mathbf{U}_{i+\sigma_l,k+1/2}^+ \right). \quad (2.28)$$

数值流通量 $\hat{\mathbf{F}}(a, b)$ 和 $\hat{\mathbf{G}}(a, b)$ 为 Lax-Friedrichs 数值流通量。 θ_l 和 σ_l 分别表示 Gauss 积分的权和节点，取值为 $\theta_l = \frac{5}{18}, \frac{8}{18}, \frac{5}{18}, \sigma_l = -\frac{\sqrt{15}}{10}, 0, +\frac{\sqrt{15}}{10}, l = 0, 1, 2$ 。此时需要给出边界附近虚拟单元上的平均值 $\mathbf{U}_{i,j}$ 。下面分别在二维标量方程和方程组情形下介绍逆 Lax-Wendroff 边界处理方法以及二维有限体积形式 WENO 型外插。

2.2.1 二维标量逆 Lax-Wendroff 方法

首先考虑二维标量情形下的双曲守恒律方程

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x + g(u)_y = 0 & (x, y) \in (-1, 1) \times (-1, 1), \quad t > 0, \\ u(-1, y, t) = h(y, t) & t > 0, \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y) & (x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1]. \end{cases} \quad (2.29)$$

考虑如图 2.1 所示的边界附近的某些单元，虚线区域表示需要赋值的虚拟单元，红色

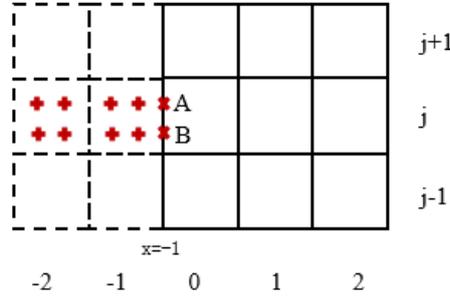


图 2.1 边界区域虚拟单元赋值示意图

+ 表示在虚拟单元 $I_{-2,j}$ 和 $I_{-1,j}$ 上用到的 Gauss 节点。每个虚拟单元的单元平均可以数值积分得到，

$$u_{m,l}^n = \sum_g \sum_k \theta_g \theta_k u(x_{m+\sigma_g}, y_{l+\sigma_k}, t_n), \quad m = -2, -1, \quad l = j-1, j, j+1, \quad (2.30)$$

其中 θ_g 和 σ_g 表示 Gauss 积分的权和节点。 $u(x_{m+\sigma_g}, y_{l+\sigma_k}, t_n)$ 表示 $u(x, y, t_n)$ 在边界点 $(-1, y_{l+\sigma_k})$ 上的 Taylor 展开在 $(x_{m+\sigma_g}, y_{l+\sigma_k})$ 上的取值。 $u(x, y, t_n)$ 在 $(-1, y_{l+\sigma_k})$ 的 Taylor 展开为

$$u(x, y, t_n) = \sum_{k=0}^{s-1} \left((x+1) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y_{l+\sigma_k}) \frac{\partial}{\partial y} \right)^k u(-1, y_{l+\sigma_k}, t_n) + O(\Delta x^s).$$

所以对于 3 阶格式， $u(x, y_{l+\sigma_k}, t_n)$ 为

$$u(x, y_{l+\sigma_k}, t_n) = \sum_{k=0}^2 \frac{(x+1)^k}{k!} \frac{\partial^k u(-1, y_{l+\sigma_k}, t_n)}{\partial x^k} + O(\Delta x^3), \quad (2.31)$$

记作

$$u(x, y_{l+\sigma_k}, t_n) = \sum_{k=0}^2 \frac{(x+1)^k}{k!} u^{*(k)}, \quad (2.32)$$

$u^{*(k)}$ 为 $\frac{\partial^k u(-1, y_{l+\sigma_k}, t_n)}{\partial x^k}$ 的 3-k 阶逼近。因此为了求图 2.1 中 $I_{-2,j}$ 和 $I_{-1,j}$ 上的 Gauss 节点值，只需要求对应的 A, B 两点上的空间导数值。

$u^{*(0)}$ 可以直接由边界条件赋值

$$u^{*(0)} = u(-1, y_{l+\sigma_k}, t_n) = h(y_{l+\sigma_k}, t_n). \quad (2.33)$$

$u^{*(1)}$ 用逆 Lax-Wendroff 方法处理。由方程 (2.29) 可知 $u_x = \frac{1}{f'(u)} (-u_t - g'(u)u_y)$, 所以

$$u^{*(1)} = \frac{-h_t(y_{l+\sigma_k}, t_n) - g'(h(y_{l+\sigma_k}, t_n))h_y(y_{l+\sigma_k}, t_n)}{f'(h(y_{l+\sigma_k}, t_n))}. \quad (2.34)$$

对于 $u^{*(2)}$, 对方程 (2.29) 两端分别关于 t, x, y 求偏导, 可以得到三个方程, 求解方程组可以得到 $u_{xx}(-1, y_{l+\sigma_k}, t_n)$ 。但是随着导数阶数的增加, 逆 Lax-Wendroff 过程计算变得复杂, 因此本文采用外插方法构造二阶及以上空间导数值, 具体构造过程在下面进行叙述。

2.2.2 二维 WENO 型外插

假设计算区域内部 $u_{i,j}^n, i = 0, \dots, N_x, j = 0, \dots, N_y$ 已经更新, 下面考虑构造外插多项式模板 $\xi \subset \Omega$, 然后构造插值多项式得到 $u^{*(k)}, k = 0, \dots, s-1$ 。对于 3 阶 WENO 型外插, 需要 ξ 包含三个小模板 S_0, S_1, S_2 , 并且满足 $S_0 \subset S_1 \subset S_2$ 。

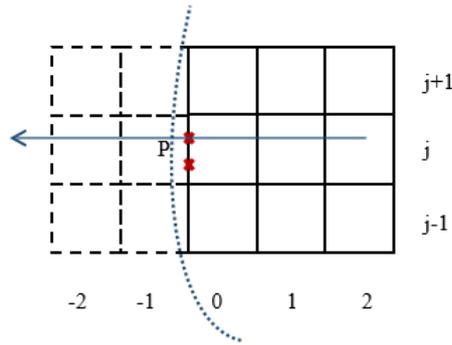


图 2.2 边界区域

为了求 $y_{j+\sigma_l}$ 上的导数, 选择模板 $S_r, r = 0, 1, 2$, 因为要在模板上构造 Q 次元多项

式，所以每个模板包含 $(r+1)^2$ 个小单元，

$$\begin{aligned} S_0 &= \{I_{0,j}\}, \\ S_1 &= \{I_{0,j-1}, I_{1,j-1}, I_{0,j}, I_{1,j}\}, \\ S_2 &= \{I_{0,j-1}, I_{1,j-1}, I_{2,j-1}, I_{0,j}, I_{1,j}, I_{2,j}, I_{0,j+1}, I_{1,j+1}, I_{2,j+1}\}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

对于 $j=0$ ，此时没有足够的内部单元去构造上面的模板， S_1 和 S_2 应该进行相应的调整，此时可以选取

$$S_0 = \{I_{0,0}\}, \quad S_1 = \{I_{0,0}, I_{1,0}, I_{0,1}, I_{1,1}\}, \quad S_2 = \{I_{0,0}, I_{1,0}, I_{2,0}, I_{0,1}, I_{1,1}, I_{2,1}, I_{0,2}, I_{1,2}, I_{2,2}\}.$$

对于 $j=N_y$ 同样可以选择类似方式调整模板。

在给定的模板 (2.35) 上构造 Q 次元多项式 $p_k(x, y)$, $k=0, 1, 2$ ，分别满足

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{I_{m,l} \in S_0} p_0(x, y) dx dy &= u_{m,l}, \\ \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{I_{m,l} \in S_1} p_1(x, y) dx dy &= u_{m,l}, \\ \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{I_{m,l} \in S_2} p_2(x, y) dx dy &= u_{m,l}. \end{aligned}$$

每个模板上多项式的具体形式为

$$\begin{aligned} p_0(x, y) &= u_{0,j}, \\ p_1(x, y) &= u_{0,j-1} \left(1 - \frac{x-x_0}{\Delta x} - \frac{y-y_{j-1}}{\Delta y} + \frac{(x-x_0)(y-y_{j-1})}{\Delta x \Delta y} \right) \\ &\quad + u_{1,j-1} \left(1 + \frac{x-x_1}{\Delta x} - \frac{y-y_{j-1}}{\Delta y} - \frac{(x-x_1)(y-y_{j-1})}{\Delta x \Delta y} \right) \\ &\quad + u_{0,j} \left(1 - \frac{x-x_0}{\Delta x} + \frac{y-y_j}{\Delta y} - \frac{(x-x_0)(y-y_j)}{\Delta x \Delta y} \right) \\ &\quad + u_{1,j} \left(1 + \frac{x-x_1}{\Delta x} + \frac{y-y_j}{\Delta y} + \frac{(x-x_1)(y-y_j)}{\Delta x \Delta y} \right), \\ p_2(x, y) &= u_{0,j-1} l_{0,j-1}(x, y) + u_{1,j-1} l_{1,j-1}(x, y) + u_{2,j-1} l_{2,j-1}(x, y) \\ &\quad + u_{0,j} l_{0,j}(x, y) + u_{1,j} l_{1,j}(x, y) + u_{2,j} l_{2,j}(x, y) \\ &\quad + u_{0,j+1} l_{0,j+1}(x, y) + u_{1,j+1} l_{1,j+1}(x, y) + u_{2,j+1} l_{2,j+1}(x, y), \end{aligned} \quad (2.36)$$

这里 $l_{m,j+n}$, $m=0, 1, 2, n=-1, 0, 1$ 为二维WENO的基函数。如果 $u(x, y, t)$ 在边界附近光滑， $u^{*(k)}$ 可以直接用线性权计算

$$u^{*(k)} = \sum_{r=0}^2 d_r \frac{\partial^k p_r(x, y)}{\partial x^k} \Big|_{(x_{-1/2}, y_{j+\sigma_l})},$$

d_r 是线性权,

$$d_0 = \Delta x^2 + \Delta y^2, \quad d_1 = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}, \quad d_2 = 1 - d_0 - d_1.$$

但是当边界附近出现间断时候, 使用如下形式的 WENO 型外插

$$u^{*(k)} = \sum_{r=0}^2 \omega_r \frac{\partial^k p_r(x, y)}{\partial x^k} \Big|_{(x_{-1/2}, y_{j+\sigma_l})}, \quad (2.37)$$

ω_r 是非线性权,

$$\omega_r = \frac{\tilde{\omega}_r}{\sum_{s=0}^2 \tilde{\omega}_s},$$

这里

$$\tilde{\omega}_r = \frac{d_r}{(\epsilon + \beta_r)^2}, \quad \epsilon = 10^{-6}.$$

光滑指示子 β_r 取法如下

$$\begin{aligned} \beta_0 &= \Delta x^2 + \Delta y^2, \\ \beta_r &= \sum_{1 \leq |\alpha| \leq r} \int_K |K|^{|\alpha|-1} (D^\alpha p_r(x, y))^2 dx dy, \quad r = 1, 2, \end{aligned} \quad (2.38)$$

其中 $K = [x_{-3/2}, x_{-1/2}] \times [y_{j-1/2}, y_{j+1/2}]$, 可以证明, 在光滑的情形下,

$$\omega_0 = O(\Delta x^2 + \Delta y^2), \quad \omega_1 = O(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}), \quad \omega_2 = 1 - \omega_0 - \omega_1.$$

2.2.3 二维方程组逆 Lax-Wendroff 方法

考虑带有初边值条件的二维欧拉方程组

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{F}(\mathbf{U})_x + \mathbf{G}(\mathbf{U})_y = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad t > 0, \quad (2.39)$$

其中 $\mathbf{U} = (U_1, U_2, U_3, U_4)^T = (\rho, \rho u, \rho v, E)^T$, $\mathbf{F}(\mathbf{U})$ 和 $\mathbf{G}(\mathbf{U})$ 为流通量函数,

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}) = (\rho u, \rho u^2 + p, \rho uv, u(E + p))^T, \quad \mathbf{G}(\mathbf{U}) = (\rho v, \rho uv, \rho v^2 + p, v(E + p))^T.$$

ρ 、 u 、 v 、 p 、 E 分别表示密度、 x 方向的速度、 y 方向速度、压强和能量。状态方程为

$$E = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2),$$

空气在常温状态下, 取 $\gamma = 1.4$ 。

假设区域 Ω 内部的单元平均值已经通过内部格式更新, 边界 $\partial\Omega$ 上点 $P_0(x_0, y_0)$ 的外法向量 $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ 穿过虚拟单元上的点 $P(x, y)$, 由于 Taylor 展开中需要的是 Gauss 点上的值, 可以把 P 理解成某个 Gauss 节点。在 P_0 处可以做局部坐标变换

$$\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (2.40)$$

θ 表示法向量 \mathbf{n} 与 x 轴的夹角。在局部坐标系下, 二维欧拉方程 (2.39) 可以表示成

$$\hat{\mathbf{U}}_t + \mathbf{F}(\hat{\mathbf{U}})_{\hat{x}} + \mathbf{G}(\hat{\mathbf{U}})_{\hat{y}} = 0, \quad (2.41)$$

其中 $\hat{\mathbf{U}} = (\hat{U}_1, \hat{U}_2, \hat{U}_3, \hat{U}_4)^T = (\rho, \rho\hat{u}, \rho\hat{v}, E)^T$, $(\hat{u}, \hat{v})^T = T(u, v)^T$ 。在边界处, \mathbf{F} 的 Jacobian 矩阵为

$$A_{\perp}(\hat{\mathbf{U}}_b) = \left. \frac{\partial \mathbf{F}(\hat{\mathbf{U}})}{\partial \hat{\mathbf{U}}} \right|_{\hat{\mathbf{U}}=\hat{\mathbf{U}}_b},$$

$\hat{\mathbf{U}}_b = \hat{\mathbf{U}}(x_0, y_0, t)$ 。Jacobian 矩阵对应的 4 个特征值为

$$\lambda_1(\hat{\mathbf{U}}_b) = \hat{u}_b - c_b, \quad \lambda_2(\hat{\mathbf{U}}_b) = \lambda_3(\hat{\mathbf{U}}_b) = \hat{u}_b, \quad \lambda_4(\hat{\mathbf{U}}_b) = \hat{u}_b + c_b.$$

左特征矩阵为

$$\mathbf{L}(\hat{\mathbf{U}}_b) = \begin{pmatrix} l_1(\hat{\mathbf{U}}_b) \\ l_2(\hat{\mathbf{U}}_b) \\ l_3(\hat{\mathbf{U}}_b) \\ l_4(\hat{\mathbf{U}}_b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{1,1}(\hat{\mathbf{U}}_b) & l_{1,2}(\hat{\mathbf{U}}_b) & l_{1,3}(\hat{\mathbf{U}}_b) & l_{1,4}(\hat{\mathbf{U}}_b) \\ l_{2,1}(\hat{\mathbf{U}}_b) & l_{2,2}(\hat{\mathbf{U}}_b) & l_{2,3}(\hat{\mathbf{U}}_b) & l_{2,4}(\hat{\mathbf{U}}_b) \\ l_{3,1}(\hat{\mathbf{U}}_b) & l_{3,2}(\hat{\mathbf{U}}_b) & l_{3,3}(\hat{\mathbf{U}}_b) & l_{3,4}(\hat{\mathbf{U}}_b) \\ l_{4,1}(\hat{\mathbf{U}}_b) & l_{4,2}(\hat{\mathbf{U}}_b) & l_{4,3}(\hat{\mathbf{U}}_b) & l_{4,4}(\hat{\mathbf{U}}_b) \end{pmatrix},$$

需要的边界条件数量由特征值符号确定。假设 $\lambda_m(\hat{\mathbf{U}}_b) \leq -\alpha < 0, m = 1, 2, 3$, 但是 $\lambda_4(\hat{\mathbf{U}}_b) \geq \alpha > 0$, 此时需要 3 个边界条件,

$$\hat{U}_1(x_0, y_0, t) = g_1(t), \quad \hat{U}_2(x_0, y_0, t) = g_2(t), \quad \hat{U}_3(x_0, y_0, t) = g_3(t).$$

P 点上的值可以由 $s-1$ 阶 Taylor 展开逼近

$$(\hat{U}_m)_{g,l} = \sum_{k=0}^{s-1} \frac{d^k}{k!} \hat{U}_m^{*(k)}, \quad m = 1, \dots, 4, \quad (2.42)$$

d 表示新坐标系下 P 点的 \hat{x} 坐标, $\hat{U}_m^{*(k)}$ 是 $\frac{\partial^k \hat{U}_m}{\partial \hat{x}^k}(x_0, y_0, t_n)$ 的 $s-k$ 阶逼近。

在局部特征分解中, \hat{U}_b 用 $\hat{U}_{0,l}$ 代替, $\hat{U}_{0,l}$ 表示离所求 P_0 点距离最近的内部单元平均

值。对于 P_0 附近需要的出流局部特征变量 V_4 定义为

$$(V_4)_{\mu,\nu} = l_4(\hat{U}_0)\hat{U}_{\mu,\nu}, \quad (2.43)$$

其中 $\hat{U}_{\mu,\nu}$ 为建立插值多项式所需要的单元平均。外插 $(V_4)_{\mu,\nu}$ 可以得到 V_4 关于 \hat{x} 的导数值 $V_4^{*(k)}$, $k = 1, \dots, s-1$ 。

对于 $U^{*(0)}$, 可以由边界条件和 $V_4 = l_4\hat{U}$ 得到

$$\begin{aligned} \hat{U}_1^{*(0)} &= g_1(t), \quad \hat{U}_2^{*(0)} = g_2(t), \quad \hat{U}_3^{*(0)} = g_3(t), \\ \hat{U}_4^{*(0)} &= \frac{1}{l_{4,4}(\hat{U}_0)} \left[V_4^{*(0)} - l_{4,1}(\hat{U}_0)\hat{U}_1^{*(0)} - l_{4,2}(\hat{U}_0)\hat{U}_2^{*(0)} - l_{4,3}(\hat{U}_0)\hat{U}_3^{*(0)} \right]. \end{aligned} \quad (2.44)$$

对于 $\hat{U}^{*(1)}$, 利用逆 Lax-Wendroff 方法处理 (2.41) 可以得到 $\hat{U}_1^{*(1)}, \hat{U}_2^{*(1)}, \hat{U}_3^{*(1)}$, 结合外插得到的 $V_4^{*(1)}$ 可以得到方程组

$$\mathbf{A}\hat{U}^{*(1)} = \mathbf{b}, \quad (2.45)$$

其中 \mathbf{A} , $\hat{U}^{*(1)}$ 和 \mathbf{b} , 分别为

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\gamma-3}{2} \left(\frac{U_2^{*(0)}}{U_1^{*(0)}} \right)^2 + \frac{\gamma-1}{2} \left(\frac{U_3^{*(0)}}{U_1^{*(0)}} \right)^2 & (3-\gamma) \frac{U_2^{*(0)}}{U_1^{*(0)}} & (1-\gamma) \frac{U_3^{*(0)}}{U_1^{*(0)}} & (\gamma-1) \\ -\frac{U_2^{*(0)} U_3^{*(0)}}{U_1^{*(0)} U_1^{*(0)}} & \frac{U_3^{*(0)}}{U_1^{*(0)}} & \frac{U_2^{*(0)}}{U_1^{*(0)}} & 0 \\ l_{4,1}(\hat{U}_0) & l_{4,2}(\hat{U}_0) & l_{4,3}(\hat{U}_0) & l_{4,4}(\hat{U}_0) \end{pmatrix},$$

$$\hat{U}^{*(1)} = \left(\hat{U}_1^{*(1)}, \hat{U}_2^{*(1)}, \hat{U}_3^{*(1)}, \hat{U}_4^{*(1)} \right)^T,$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -g'_1(t_n) - \frac{\partial}{\partial \hat{y}} \left(\hat{U}_3^{*(0)} \right) \\ -g'_2(t_n) - \frac{\partial}{\partial \hat{y}} \left(\frac{\hat{U}_2^{*(0)} \hat{U}_3^{*(0)}}{\hat{U}_1^{*(0)}} \right) \\ -g'_3(t_n) - \frac{\partial}{\partial \hat{y}} \left[(\gamma-1) \hat{U}_4^{*(0)} - \frac{\gamma-1}{2} \frac{(\hat{U}_2^{*(0)})^2}{\hat{U}_1^{*(0)}} + \frac{3-\gamma}{2} \frac{(\hat{U}_3^{*(0)})^2}{\hat{U}_1^{*(0)}} \right] \\ V_4^{*(1)} \end{pmatrix}.$$

求解上面的方程组可以得到 $\hat{U}_m^{*(1)}$ 。对于二阶及以上导数, 使用外插计算即可。

下面总结上述二维欧拉方程的求解算法:

1. 确定局部坐标变换 (2.40), 然后计算变换后方程的 Jacobian 矩阵的特征值 $\lambda_m(\hat{U}_0)$ 和左特征矩阵 $L(\hat{U}_0)$, 通过特征值的符号确定需要的边界条件 g_m 的数量。

2. 构建出流特征变量 $(V_m)_{\mu,\nu} = l_m(\hat{U}_0)\hat{U}_{\mu,\nu}$, 通过 WENO 型外插构造 $V_m^{*(k)}$, $k =$

$0, \dots, s-1$ 。

3. 由 (2.44) 和 (2.45) 得到 $\widehat{U}^{*(0)}$ 和 $\widehat{U}^{*(1)}$ 。对于二阶及以上导数用 WENO 型外插计算。

4. 通过 (2.42) 计算虚拟单元上的 Gauss 点值，然后由 \widehat{U} 转化到 U 。

当时间层 t_n 内部单元和虚拟单元上的单元平均更新完成后，内部格式在时间上采用 Runge-Kutta 方法 (2.46) 进行更新，

$$U^{(1)} = U^n + \Delta t L(U^n), \quad U^{(2)} = \frac{3}{4}U^n + \frac{1}{4}U^{(1)} + \frac{1}{4}\Delta t L(U^{(1)}), \quad U^{n+1} = \frac{1}{3}U^n + \frac{2}{3}U^{(2)} + \frac{2}{3}\Delta t L(U^{(2)}), \quad (2.46)$$

边界处也应该采用和 Runge-Kutta 方法匹配的时间离散进行处理。如果对与时间相关的边界条件 $g(t)$ 采用传统的处理方法

$$U^n \sim g(t_n), \quad U^{(1)} \sim g(t_n + \Delta t), \quad U^{(2)} \sim g(t_n + \Delta t/2),$$

会下降到二阶精度^[41]，可以采用下面的匹配方法更新边界条件，

$$U^n \sim g(t_n), \quad U^{(1)} \sim g(t_n) + \Delta t g'(t_n), \quad U^{(2)} \sim g(t_n) + \frac{1}{2}\Delta t g'(t_n) + \frac{1}{4}\Delta t^2 g''(t_n), \quad (2.47)$$

此种时间匹配方法不会导致降阶，可以保证三阶精度。

3 数值实验

本章通过数值实验展示有限体积形式逆 Lax-Wendroff 数值边界处理方法的性能。所有数值实验中的 CFL 数取 0.6，计算区域内部 WENO-ZQ 格式的线性权取 $\gamma_1 = 0.8$ 、 $\gamma_2 = 0.1$ 、 $\gamma_3 = 0.1$ 。

算例1 首先考虑波动方程

$$\begin{cases} u_t + u_x = 0 & x \in (-1, 1), \quad t > 0, \\ u(x, 0) = 0.25 + 0.5 \sin(\pi x) & x \in [-1, 1], \\ u(-1, t) = g(t) & t > 0. \end{cases}$$

$x = -1$ 是入流边界，需一个边界条件描述， $x = 1$ 是出流边界，不需要边界条件。

首先取边界条件为

$$g(t) = 0.25 - 0.5 \sin[\pi(1 + t)], \quad (3.1)$$

此时上述初边值问题有光滑的精确解 $u(x, t) = 0.25 + 0.5 \sin[\pi(x - t)]$ 。

在边界处分别采用 2 阶和 4 阶 Taylor 展开，计算区域内部分别使用 3 阶和 5 阶 WENO-ZQ 格式。在边界条件 (3.1) 下，计算 $t = 1$ 时刻的精度，误差分别见表 3.1 和

表 3.2。当使用 2 阶 Taylor 展开时，由表 3.1 可知格式可以达到 3 阶精度；当使用 4 阶 Taylor 展开时，由表 3.2 可知格式可以达到所需要的 5 阶精度。

表 3.1 波动方程 3 阶精度测试， $t = 1$ 。

N	L_∞		L_1		L_2	
	error	order	error	order	error	order
10	3.4053E-02		1.9532E-02		2.1907E-02	
20	4.8058E-03	2.825	2.4912E-03	2.971	2.8791E-03	2.928
40	5.9603E-04	3.011	3.2335E-04	2.946	3.6915E-04	2.963
80	7.4799E-05	2.994	4.0958E-05	2.981	4.6448E-05	2.991
160	9.3585E-06	2.999	5.1371E-06	2.995	5.8132E-06	2.998
320	1.1702E-06	2.999	6.4246E-07	2.999	7.2689E-07	3.000
640	1.4629E-07	3.000	8.0296E-08	3.000	9.0865E-08	3.000
1280	1.8287E-08	3.000	1.0036E-08	3.000	1.1359E-08	3.000

表 3.2 波动方程 5 阶精度测试， $t = 1$ 。

N	L_∞		L_1		L_2	
	error	order	error	order	error	order
10	4.6334E-02		1.7926E-02		2.1695E-02	
20	1.3255E-03	5.127	5.0340E-04	5.154	6.5365E-04	5.053
40	1.0019E-04	3.726	1.1327E-05	5.474	2.4905E-05	4.714
80	2.0312E-06	5.624	1.5854E-07	6.159	3.6425E-07	6.095
160	5.4482E-09	8.542	1.8652E-09	6.409	2.1057E-09	7.435
320	1.7433E-10	4.966	5.8799E-11	4.987	6.6161E-11	4.992
640	5.5012E-12	4.986	1.7229E-12	5.093	1.9573E-12	5.079

接下来考虑边界条件

$$g(t) = \begin{cases} 0.25 & t \leq 1, \\ -1 & t > 1. \end{cases}$$

此时上述初边值问题的精确解为

$$u(x, t) = \begin{cases} -1 & x < t - 2, \\ 0.25 & t - 2 \leq x < t - 1, \\ 0.25 + 0.5 \sin[\pi(x - t)] & x \geq t - 1. \end{cases}$$

可以看出, 当 $t \leq 1$ 时, 由于 $g(t)$ 不连续导致精确解的一阶导数存在间断。当 $t > 1$ 时, 此时会有间断由入流边界进入计算区域内部。分别用 3 阶和 5 阶格式计算 $t = 1.5$ 时刻的解, 解的图像见图 3.1, 可以看出 3 阶格式在间断处出现轻微振荡, 5 阶格式能够很好地捕捉间断, 总体上逆 Lax-Wendroff 数值边界处理方法有较高的分辨率。

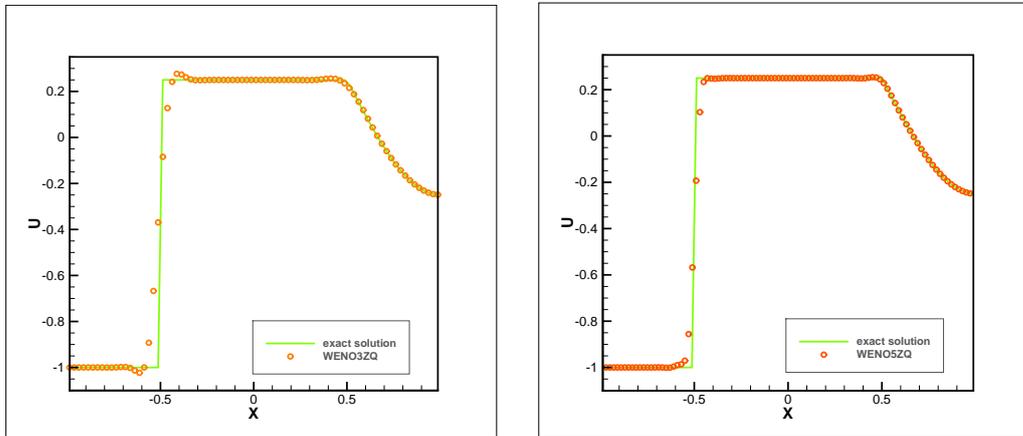


图 3.1 波动方程, $\Delta x = 1/50$, $t = 1.5$ 。三阶 (左), 五阶 (右)。

算例2 考虑 Burgers 方程

$$\begin{cases} u_t + (\frac{1}{2}u^2)_x = 0 & x \in (-1, 1), t > 0, \\ u(x, 0) = 0.25 + 0.5 \sin(\pi x) & x \in [-1, 1], \\ u(-1, t) = g(t) & t > 0. \end{cases}$$

把 Burgers 初值问题在周期边界条件下计算得到的精确解记为 $w(x, t)$ 。设 $g(t) = w(-1, t)$, 左边界 $x = -1$ 是入流边界, 右边界 $x = 1$ 是出流边界。当计算时间 $t = 0.3$ 时, 方程的解是光滑的。在边界处采用 4 阶 Taylor 展开, 误差见表 3.3, 此时格式达到 5 阶精度。

当计算时间 $t = 1.1$ 时, 方程的解出现间断。采用 5 阶逆 Lax-Wendroff 格式进行计算, 解的图像见图 3.2(左), 可以看出 5 阶逆 Lax-Wendroff 格式能够较好地捕捉间断, 具有高分辨率。

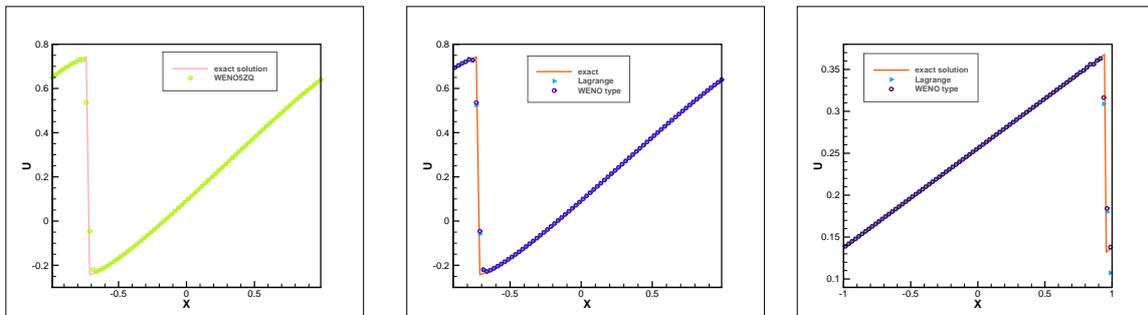


图 3.2 Burgers 方程, $\Delta x = 1/40$, $t = 1.1$ (左), $t = 7.8$ (中), $t = 7.8$ (右)。

表 3.3 Burgers 方程精度测试, $t = 0.3$ 。

N	L_∞		L_1		L_2	
	error	order	error	order	error	order
10	2.5501E-02		8.4525E-03		1.2424E-02	
20	6.1165E-03	2.060	6.5800E-04	3.683	1.5262E-03	3.025
40	3.8321E-04	3.996	2.2090E-05	4.897	6.8009E-05	4.488
80	3.8599E-05	3.311	1.2647E-06	4.127	4.8738E-06	3.803
160	9.2210E-07	5.388	3.1671E-08	5.319	1.1207E-07	5.443
320	1.5080E-08	5.934	7.3220E-10	5.435	2.1775E-09	5.686
640	4.1645E-10	5.178	1.9986E-11	5.195	5.5229E-11	5.301
1280	1.5405E-11	4.757	5.8556E-13	5.093	1.6194E-12	5.092

为了说明 Lagrange 型外插和 WENO 型外插的区别, 采用 5 阶格式, 分别选取解在边界附近光滑和有间断的情形进行测试。图 3.2(中)展示了 $t = 1.1$ 时刻解在边界附近光滑的情形, 可以看出无论是 Lagrange 型外插还是 WENO 型外插都可以达到满意的效果。图 3.2(右)展示了 $t = 7.8$ 时刻边界附近出现激波的情形, 此时 Lagrange 型外插出现严重下冲, WENO 型外插仍旧表现很好。所以当边界附近出现间断时, 应该选择稳健的 WENO 型外插, 可以有效控制振荡。

算例3 考虑一维欧拉方程(2.19), 计算区域为 $(-\pi, \pi)$, 初始条件为

$$\rho(x, 0) = 1 + 0.2 \sin(x), \quad u(x, 0) = 1, \quad p(x, 0) = 2.$$

假设选择的边界条件能够使精确解是初始条件的变换, 有如下形式

$$\rho(x, t) = 1 + 0.2 \sin(x - t), \quad u(x, t) = 1, \quad p(x, t) = 2.$$

在每个边界, $\lambda_1 < 0$ 、 $\lambda_2 > 0$ 、 $\lambda_3 > 0$, 因此在左边界 $x = -\pi$ 处需要两个边界条件,

$$\rho(-\pi, t) = 1 + 0.2 \sin(t), \quad u(-\pi, t) = 1.$$

在右边界 $x = \pi$ 处需要一个边界条件, 可取成

$$\rho(\pi, t) = 1 + 0.2 \sin(t).$$

在边界处采用 4 阶 Taylor 展开, 计算 $t = 2$ 时刻密度 ρ 的误差, 由计算结果表 3.4 可以看出, 格式达到 5 阶精度。

算例4 为了检验逆 Lax-Wendroff 边界方法处理含有激波的欧拉方程的能力, 考虑爆炸

表 3.4 欧拉方程精度测试, $t = 2$ 。

N	L_∞		L_1		L_2	
	error	order	error	order	error	order
10	3.3890E-03		1.0813E-03		1.5354E-03	
20	5.3655E-05	5.981	1.1644E-05	6.537	1.7127E-05	6.486
40	1.1698E-06	5.519	2.5507E-07	5.513	3.4273E-07	5.643
80	5.1720E-08	4.499	8.6573E-09	4.881	1.2473E-08	4.780
160	1.8507E-09	4.805	2.6341E-10	5.039	3.9176E-10	4.993
320	5.6327E-11	5.038	8.0855E-12	5.026	1.1946E-11	5.035
640	1.7319E-12	5.023	2.4926E-13	5.020	3.6540E-13	5.031

波问题, 此问题涉及激波、稀疏波和接触间断之间的相互作用。初始条件为

$$U(x, 0) = \begin{cases} U_L & 0 < x < 0.1, \\ U_M & 0.1 < x < 0.9, \\ U_R & 0.9 < x < 1, \end{cases}$$

其中

$$\rho_L = \rho_M = \rho_R = 1, \quad u_L = u_M = u_R = 0, \quad p_L = 10^3, \quad p_M = 10^{-2}, \quad p_R = 10^2.$$

在边界 $x = 0$ 和 $x = 1$ 处是固壁边界条件。每个边界上都采用 4 阶 Taylor 展开。在入流边界处, 有边界条件 $u = 0$, 采用 5 阶逆 Lax-Wendroff 边界处理方法进行处理; 对于出流边界, 直接采用 5 阶 WENO 型外插。计算 $t = 0.038$ 时刻密度函数 ρ 的解, 网格密度 Δx 分别取 $1/800$ 、 $1/1600$ 、 $1/3200$, 密度图像见图 3.3, 其中参考解利用 5 阶 WENO-JS 格式加上反射边界条件计算, 参考解网格密度取 $\Delta x = 1/16000$ 。可以看出, 逆 Lax-Wendroff 边界处理方法加上 WENO 型外插可以给出较好的分辨率。

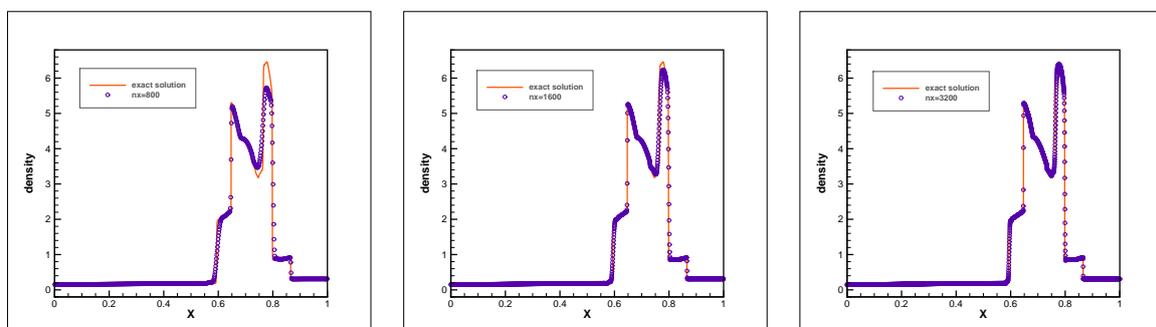


图 3.3 爆炸波问题密度 ρ 图像, $t = 0.038$ 。 $\Delta x = \frac{1}{800}$ (左), $\Delta x = \frac{1}{1600}$ (中), $\Delta x = \frac{1}{3200}$ (右)。

算例5 下面考虑二维 Burgers 方程

$$\begin{cases} u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x + \left(\frac{u^2}{2}\right)_y = 0 & (x, y) \in \Omega, \quad t > 0, \\ u(x, y, 0) = 0.75 + 0.5 \sin[\pi(x + y)] & (x, y) \in \bar{\Omega}, \\ u(x, y, t) = g(x, y, t) & (x, y) \in \Gamma, \quad t > 0, \end{cases}$$

其中

$$\Omega = (-1, 1) \times (-1, 1), \quad \Gamma = \{(x, y) : x = -1 \text{ or } y = -1\}$$

二维 Burgers 方程在区域 $(-1, 1) \times (-1, 1)$ 上采用周期边界条件得到的精确解记作 $w(x, y, t)$, 设边界条件 $g(x, y, t) = w(x, y, t)$ 。在边界处采用 2 阶 Taylor 展开, 外插采用 WENO 型外插。当 $t = 0.15$ 时, Burgers 方程有光滑的精确解, 解的误差见表 3.5, 可以看出格式达到了 3 阶精度。当 $t = 0.55$ 时, 此时方程的精确解含有间断, 解沿对

表 3.5 二维 Burgers 方程精度测试, $t = 0.15$ 。

$N_x = N_y$	L_∞		L_1		L_2	
	error	order	error	order	error	order
10	8.1627E-02		1.5185E-02		2.2058E-02	
20	2.2350E-02	1.869	2.3850E-03	2.671	3.8285E-03	2.526
40	4.9853E-03	2.165	3.5110E-04	2.764	6.0785E-04	2.655
80	6.7562E-04	2.883	4.6159E-05	2.927	8.1019E-05	2.907
160	7.8389E-05	3.107	5.8865E-06	2.971	1.0383E-05	2.964
320	1.0848E-05	2.853	7.4438E-07	2.983	1.3223E-06	2.973
640	1.4935E-06	2.861	9.3834E-08	2.988	1.6737E-07	2.982

角线图像见图 3.4, 可以看出逆 Lax-Wendroff 格式有较好的分辨率, 能够很好地捕捉整个区域内的激波。同时注意到, 即使距离出流边界很近的激波, WENO 型外插也能很好地处理, 给出非振荡的数值解。

算例6 考虑二维欧拉方程 (2.39), 区域为 $(x, y) \in (0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$, 初始条件为

$$\rho(x, y, 0) = 1 + 0.2 \sin(x + y), \quad u(x, y, 0) = 1, \quad v(x, y, 0) = 1, \quad p(x, y, 0) = 2.$$

欧拉方程初值问题取周期边界条件时候得到的精确解记作 $W(x, y, t)$, 此时精确解的形式为

$$\rho(x, y, t) = 1 + 0.2 \sin(x + y - 2t), \quad u(x, y, t) = 1, \quad v(x, y, t) = 1, \quad p(x, y, t) = 2.$$

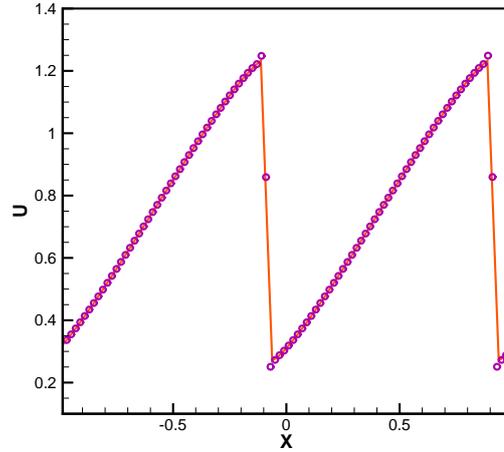


图 3.4 二维 Burgers 方程, $\Delta x = \Delta y = 1/50$, $t = 0.55$ 。

当在边界处需要边界条件时, 由 $W(x, y, t)$ 给出相应的边界条件。需要边界条件的数量由特征值 λ_m 的符号确定。例如在边界 $x = 2\pi$ 处, 此时只有特征值 $\lambda_1 < 0$, 需要一个边界条件, 可以取 $\rho(2\pi, y, t) = 1 + 0.2 \sin(y - 2t)$, 在其余边界采用类似的做法取边界条件。在边界处采用 2 阶 Taylor 展开, 计算时刻为 $t = 0.2$, 密度 ρ 的误差见表 3.6, 可以看出逆 Lax-Wendroff 格式可以达到 3 阶精度。

表 3.6 二维欧拉方程精度测试, $t = 0.2$ 。

$N_x = N_y$	L_∞		L_1		L_2	
	error	order	error	order	error	order
10	5.0212E-03		2.5591E-03		3.0168E-03	
20	5.4421E-04	3.206	3.1712E-04	3.013	3.5191E-04	3.100
40	6.3817E-05	3.092	4.0220E-05	2.979	4.4667E-05	2.978
80	7.9402E-06	3.007	5.0499E-06	2.994	5.6083E-06	2.994
160	9.9254E-07	3.000	6.3193E-07	2.998	7.0186E-07	2.998
320	1.2413E-07	2.999	7.9026E-08	2.999	8.7774E-08	2.999
640	1.5518E-08	3.000	9.8788E-09	3.000	1.0973E-08	3.000

算例7 考虑二维欧拉方程组的双马赫反射问题, 计算区域为 $[0, 4] \times [0, 1]$ 。反射墙的位置在计算区域的底部, 起始位置在 $x = \frac{1}{6}, y = 0$ 处, 在反射墙上有固壁边界条件 $(u, v) \cdot \mathbf{n} = 0$ 。初始时马赫数为 10 的激波向右运动, 然后在墙上反射, 与 x 轴成 60° 。上边界所需要的边界条件由马赫数为 10 的激波的精确运动确定, 在激波头部左右位置分别使用波后和波前条件。下边界从 $x = 0$ 到 $x = \frac{1}{6}$ 的位置采用精确的波后条件。在反射墙的位置采用 2 阶 Taylor 展开和 WENO 型外插进行处理。计算 $t = 0.2$ 时刻密度

ρ 的等值线图。图 3.6 展示了 $[0, 3] \times [0, 1]$ 区域逆 Lax-Wendroff 数值边界处理方法和 3 阶 WENO-ZQ 格式在反射墙上利用反射边界条件计算的结果。两种计算结果在双马赫杆附近区域的图像见图 3.6，可以看出逆 Lax-Wendroff 格式可以得到和 WENO-ZQ 方法相似的结果。

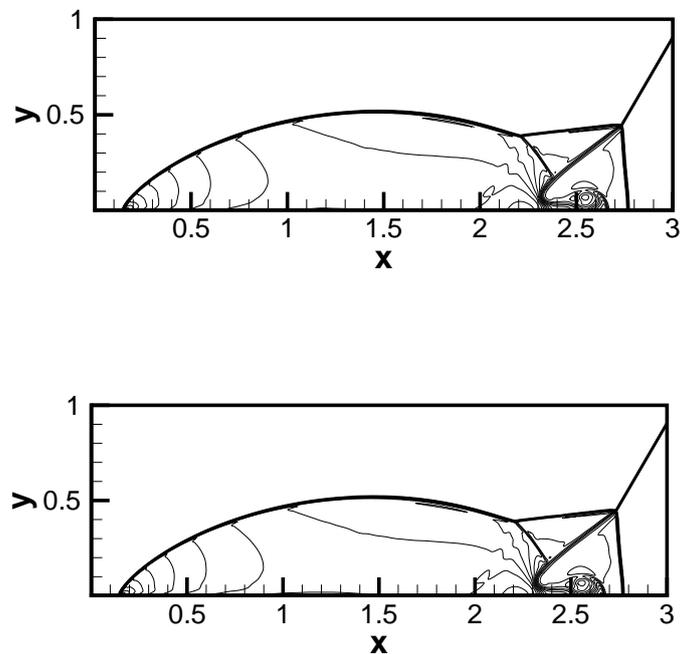


图 3.5 双马赫反射问题密度 ρ 等值线图，等值线从 1.5 到 22.7，共 30 条。 $\Delta x = \Delta y = \frac{1}{300}$ ， $t = 0.2$ 。逆 Lax-Wendroff 方法（上），WENO-ZQ 方法（下）。

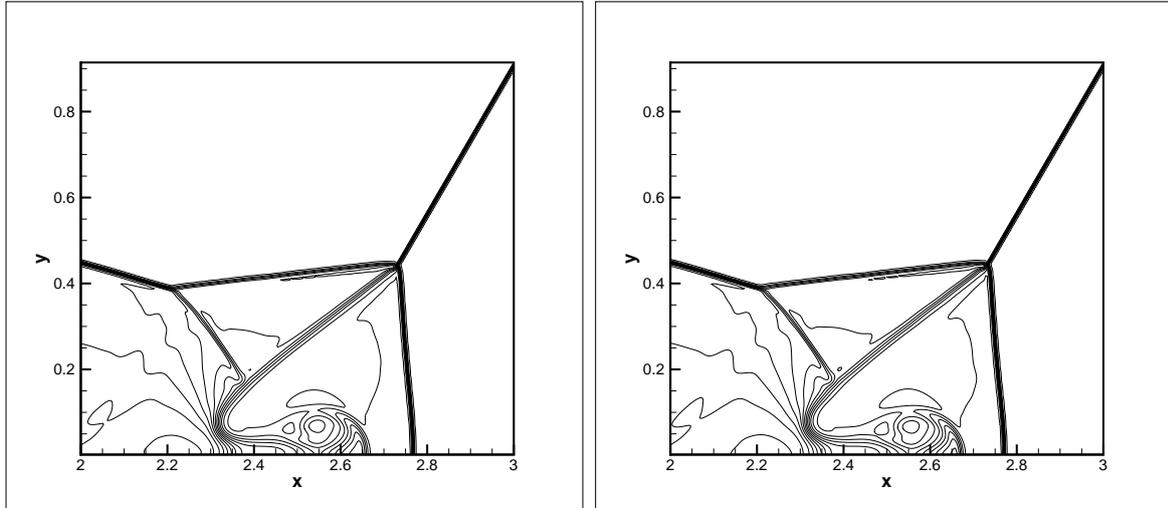


图 3.6 双马赫反射问题，双马赫杆附近区域密度 ρ 等值线图，等值线从 1.5 到 22.7，共 30 条。 $\Delta x = \Delta y = \frac{1}{300}$ ， $t = 0.2$ 。逆 Lax-Wendroff 方法（左），WENO-ZQ 方法（右）

4 总结与展望

本文建立了有限体积框架下双曲守恒律方程的逆 Lax-Wendroff 数值边界处理格式，并且在边界处构造了更加稳健的有限体积 WENO 型外插，使得边界和笛卡尔网格以任意形状相交的情形下可以比较准确地给出虚拟单元上的单元平均。当边界附近光滑时，Lagrange 型外插和 WENO 型外插都表现良好；当边界附近出现间断时，Lagrange 型外插在间断附近会出现振荡，WENO 型外插能够控制振荡，捕捉间断。逆 Lax-Wendroff 数值边界处理的思想是利用给定的方程和边界条件将空间导数转化到时间导数。为了匹配内部高阶数值格式，在入流边界用逆 Lax-Wendroff 数值边界格式处理，首先对给定的偏微分方程进行改写，将关于空间的零阶和一阶法向导数表示成时间导数和切向导数的组合，对于二阶及以上的法向导数通过外插方法得到，然后将法向导数带入相应阶数的 Taylor 展开里面，进而求出 Gauss 积分节点上的取值，最后给出虚拟单元上的单元平均。对于出流边界，通过 Lagrange 型外插或者 WENO 型外插计算所需要的各阶导数值，带入 Taylor 展开求出 Gauss 积分节点上的取值，然后给出虚拟单元上的取值。通过大量数值实验可以看出，逆 Lax-Wendroff 格式在光滑情形下可以达到高阶精度，在间断情形下可以很好地捕捉间断，具有高分辨率。

接下来，希望进一步发展有限体积框架下关于对流扩散方程的逆 Lax-Wendroff 数值边界处理方法。

参考文献

- [1] Harten, High resolution schemes for hyperbolic conservation laws, *Journal of Computational Physics* 49 (1983) 357-393.
- [2] A. Harten, S. Osher, Uniformly high order accurate non-oscillatory schemes I, *SIAM Journal on Numerical Analysis* 24 (1987) 279-309.
- [3] A. Harten, Preliminary results on the extension of ENO schemes to two-dimensional problems nonlinear hyperbolic problems, Springer Berlin Heidelberg (1987).
- [4] A. Harten, B. Engquist, S. Osher, S.R. Chakravarthy, Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes III, *Journal of Computational Physics* 131 (1997) 3-47.
- [5] X.-D. Liu, S. Osher, T. Chan, Weighted essentially non-oscillatory schemes, *Journal of Computational Physics* 115 (1994) 200-212.
- [6] G.-S. Jiang, C.-W. Shu, Efficient implementation of weighted ENO Schemes, *Journal of Computational Physics* 126 (1996) 202 - 228.
- [7] J. Qiu, C.-W. Shu, Hermite WENO schemes and their application as limiters for Runge - Kutta discontinuous Galerkin method: one-dimensional case, *Journal of Computational Physics* 193 (2004) 115-135.
- [8] J. Qiu, C.-W. Shu, Hermite WENO schemes and their application as limiters for Runge - Kutta discontinuous Galerkin method II: Two dimensional case, *Journal of Computational Physics* 34 (2005) 642-663.
- [9] D. Levy, G. Puppo, G. Russo, Central WENO schemes for hyperbolic systems of conservation laws, *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis* 33 (1999) 547-571.
- [10] D. Levy, G. Puppo, G. Russo, Compact central WENO schemes for multidimensional conservation laws, *SIAM Journal on Scientific Computing* 22 (2000) 656-672.
- [11] J. Zhu, J. Qiu, A new fifth order finite difference WENO scheme for solving hyperbolic conservation laws, *Journal of Computational Physics* 318 (2016) 110-121.
- [12] J. Zhu, J. Qiu, A new type of finite volume WENO schemes for hyperbolic conservation laws, *Journal of Scientific Computing* 73 (2017) 1338-1359.
- [13] Henshaw, D. William, K.K. Chand, A composite grid solver for conjugate heat transfer in fluid - structure systems, *Journal of Computational Physics* 228 (2009) 3708-3741.
- [14] G. Chesshire, Composite overlapping meshes for the solution of partial differential equations, *Journal of Computational Physics* 90 (1990) 1-64.
- [15] C. Helzel, M.J. Berger, R.J. LeVeque, A high-resolution rotated grid method for conservation laws with embedded geometries, *SIAM Journal on Scientific Computing* 26 (2005) 785-809.

-
- [16] M.J. Berger, C. Helzel, R.J. LeVeque, H-Box Methods for the approximation of hyperbolic conservation laws on irregular grids, Society for Industrial and Applied Mathematics (2003).
- [17] H.O. Kreiss, N.A. Petersson, A second order accurate embedded boundary method for the wave equation with Dirichlet data, SIAM Journal on Scientific Computing 27 (2006) 1141-1167.
- [18] H.O. Kreiss, N.A. Petersson, J. Ystrom, Difference approximations for the second order wave equation, SIAM Journal on Numerical Analysis 40 (2002) 1940-1967.
- [19] H.O. Kreiss, N.A. Petersson, J. Ystrom, Difference approximations of the Neumann problem for the second order wave equation, SIAM Journal on Numerical Analysis 42 (2004) 1292-1323.
- [20] B. Sjogreen, N.A. Petersson, A Cartesian embedded boundary method for hyperbolic conservation laws, Communications in Computational Physics vol.2 no.6 (2006) 1199-1219.
- [21] P. Colella, D.T. Graves, B.J. Keen, D. Modiano, A Cartesian grid embedded boundary method for hyperbolic conservation laws, Journal of Computational Physics 211 (2006) 347-366.
- [22] P. Mccorquodale, P. Colella, H. Johansen, A Cartesian grid embedded boundary method for the heat equation on irregular domains, Journal of Computational Physics 173 (2001) 620-635.
- [23] M. Popescu, R. Vedder, W. Shyy, A finite volume-based high-order, Cartesian cut-cell method for wave propagation, International Journal for Numerical Methods in Fluids 56 (2008) 787-1818.
- [24] AIAA, A finite volume-based high order Cartesian cut-cell method for computational aeroacoustics - 11th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference (AIAA), International Journal for Numerical Methods in Fluids 56 (2005) 1787 - 1818.
- [25] C.S. Peskin, The immersed boundary method, Acta Numerica 11 (2002).
- [26] R. Mittal, G. Iaccarino, Immersed boundary methods, Annual Review of Fluid Mechanics 37 (2005) 239-261.
- [27] C.S. Peskin, Flow patterns around heart valves: a numerical method, Journal of Computational Physics 10 (1972) 252-271.
- [28] R. Ghias, R. Mittal, H. Dong, A sharp interface immersed boundary method for compressible viscous flows, Journal of Computational Physics 225 (2007) 528-553.
- [29] P.D. Palma, D. Tullio, G. Pascazio, M. Napolitano, An immersed-boundary method for compressible viscous flows, Computers Fluids 35 (2006) 693-702.
- [30] L. Huang, C.-W. Shu, M. Zhang, Numerical boundary conditions for the fast sweeping high order WENO methods for solving the eikonal equation, Journal of Computational Mathematics 26(3) (2008) 336-346.

-
- [31] T. Xiong, M. Zhang, Y.-T. Zhang, C.-W. Shu, Fast sweeping fifth order WENO scheme for static Hamilton-Jacobi equations with accurate boundary treatment, *Journal of Scientific Computing* 45(1-3) (2010) 514-536.
- [32] S. Tan, C.-W. Shu, Inverse Lax-Wendroff procedure for numerical boundary conditions of conservation laws, *Journal of Computational Physics* 229(21) (2010) 8144-8166.
- [33] S. Tan, C. Wang, C.-W. Shu, J. Ning, Efficient implementation of high order inverse Lax - Wendroff boundary treatment for conservation laws, *Journal of Computational Physics* 231(6) (2012) 2510-2527.
- [34] S. Tan, C.-W. Shu, Inverse Lax - Wendroff procedure for numerical boundary conditions of hyperbolic equations: survey and new developments, *Advances in Applied Mathematics, Modeling, and Computational Science* (2013).
- [35] J. Lu, J. Fang, S. Tan, C.-W. Shu, M. Zhang, Inverse Lax - Wendroff procedure for numerical boundary conditions of convection - diffusion equations, *Journal of Computational Physics* 317 (2016) 276-300.
- [36] S. Tan, C.-W. Shu, A high order moving boundary treatment for compressible inviscid flows, *Academic Press Professional* (2011).
- [37] C. Wang, J. Ding, W. Han, S. Tan, High order numerical simulation of detonation wave propagation through complex obstacles with the inverse Lax-Wendroff treatment, *Communications in Computational Physics* 18(05) 1264-1281.
- [38] T. Li, C.-W. Shu, M. Zhang, Stability analysis of the inverse Lax - Wendroff boundary treatment for high order central difference schemes for diffusion equations, *Journal of Scientific Computing* 70(2) (2017) 576-607.
- [39] Vilar Franois, C.-W. Shu, Development and stability analysis of the inverse Lax-Wendroff boundary treatment for central compact schemes, *ESAIM Mathematical Modelling and Numerical Analysis* 49(1) (2014) c115.
- [40] C.-W. Shu, S. Osher, Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes, *Journal of Computational Physics* 77 (1988) 439 - 471.
- [41] M.H. Carpenter, D. Gottlieb, S. Abarbanel, W.-S. Don, The theoretical accuracy of Runge-Kutta time discretizations for the initial boundary value problem: a study of the boundary error, *SIAM Journal on Scientific Computing* 16 (1995) 1241 - 1252.